БИЛЕТ 1.

1. Свойство σ-аддитивности меры. Множества типа $F\sigma$ и $G\delta$. Мера Лебега-Стилтьеса. Пример неизмеримого множества.

2. Является ли компактным оператор $A \in L(L_2(0,1) \to L_2(0,1))$, $Ax(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t x(t)dt$?

БИЛЕТ 2.

1. Измеримость предела сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций. Сходимость по мере. Теорема Лебега. Связь между сходимостью почти всюду и сходимостью по мере.

2. Является ли компактным оператор $A \in L(C[0,1] \to C[0,1])$, $Ax(t) = x(0) + t^{2020}x(1)$?

в полезном

БИЛЕТ 3.

1. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Интегрируемость ограниченной и измеримой функции. Свойства интеграла Лебега от ограниченной функции.

2. Является ли компактным оператор $A \in L(C[0,1] \to C[0,1])$, $Ax(t) = \frac{t^{2020}}{\sin t + 2}x(t)$?

БИЛЕТ 4.

1. Интеграл Лебега от неограниченной и неотрицательной функции. Полная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Мажорантный признак суммируемости.

2. Будет ли метрическим пространством множество точек на прямой, если расстояние между ними ввести по формуле $\rho(x, y) = \dfrac{7|x-y|}{1+5|x-y|}$?

БИЛЕТ 5.

1. Интеграл Лебега от неограниченной функции любого знака. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

2. Найти в классе $C[0, \pi]$ собственные значения и собственные функции оператора

$$Ax(t) = \int\limits_0^\pi \cos(t+s)x(s)ds.$$

БИЛЕТ 6.

1. Теорема Леви и следствие из нее для рядов. Теорема Фату. Теорема Лебега-критерий интегрируемости.

2. Найти норму и спектр оператора $A \in L(l_2 \to l_2)$, $A(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_1/2, 2x_2/3, 3x_3/4, ..., nx_n/(n+1), ...)$.

БИЛЕТ 7.

1. Теорема Фубини. Интеграл Лебега для множества бесконечной меры.

2. Пусть A– отображение метрического пространства M в себя и пусть выполнено неравенство $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ для любых $x, y \in M, x \neq y$. Имеет ли это отображение неподвижную точку и если имеет, то единственна ли она?

БИЛЕТ 8.

1. Метрические пространства. Теорема о вложенных шарах.

2. Вычислить в пространстве $C[0, 1]$ норму линейного функционала $f(x) = -x(1/3) + \int\limits_0^1 x(t)dt$.

БИЛЕТ 9.

1. Теорема Бэра о категориях. Принцип сжимающих отображений.

2. Рещить интегральное уравнение в $C[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \cos(4x) + \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x - t) f(t)dt.$$

БИЛЕТ 10.

1. Классы Lp, p>1. Неравенства Гельдера и Минковского.

2. Пусть

$$K(s,t) = \begin{cases} (1-s)t, & 0 < t < s, \\ \\ (1-t)s, & s < t < 1, \end{cases}$$

Найти собственные значения и собственные функции оператора

$$A \in L(L_2(0,1) \to L_2(0,1)) : Ax(s) = \int\limits_0^1 K(s,t)x(t)dt.$$

БИЛЕТ 11.

1. Полнота пространства Lp.

2. Найти норму и спектр оператора $A \in L(l_2 \to l_2)$, $A(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, ..., x_n, ...)$.

БИЛЕТ 12.

1. Плотность множества непрерывных функций в Lp. Непрерывность в метрике Lp.

2. Определить спектр оператора $Ax(t) = tx(t)$ в пространстве $C[a,b]$.

БИЛЕТ 13.

1. Линейные нормированные пространства. Теорема Рисса.

2. Будет ли метрическим пространством множество точек на прямой, если расстояние между ними ввести по формуле

$$\rho(x,y) = (|x-y|)^{1/3}?$$

БИЛЕТ 14.

1. Линейные операторы и их свойства. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов.

2. Пусть A отображение $C[0,\pi/2] \to C[0,\pi/2]$, действующее по формуле

$$Ax = \lambda \int\limits_0^{\pi/2} \cos(t+y)x(s)ds + \sin t.$$

При каких λ отображение A будет сжимающим?

БИЛЕТ 15.

1. Теорема Банаха-Штейнгауза и следствие из нее. Пример применения теоремы в теории рядов Фурье.

2. Является ли компактным оператор $A \in L(C[0,1] \to C[0,1])$, $Ax(t) = t^2(1-t)x(t)$?

БИЛЕТ 16.

1. Обратный оператор. Достаточные условия существования обратного оператора. Формулировка теоремы Банаха об обратном операторе.

2. Найти норму и спектр оператора $A \in L(l_2 \to l_2)$, $A(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_1, x_2/2, x_3/3, ..., x_n/n, ...)$.

БИЛЕТ 17.

1. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала в линейном нормированном пространстве.

2. Рещить интегральное уравнение в $C[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \cos^2 x + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x-t) f(t) dt.$$

БИЛЕТ 18.

1. Общий вид линейного функционала в конкретных пространствах.

2. Будет ли относительно компактным в пространстве $C[0, 1]$ множество $\{\sin^2(x+n)\}$, состоящее из континуального числа последовательностей?

БИЛЕТ 19.

1. Слабая сходимость. Связь между сильной и слабой сходимостью. Критерий сильной сходимости.

2. Будет ли функция $f(x) = x^{-4/3} \sin \dfrac{1}{x}$ интегрируема по Лебегу на множестве $(0, 1)$?

БИЛЕТ 20.

1. Определение гильбертова пространства и его основные свойства. Теорема об элементе с наименьшей нормой.

2. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет конечную производную всюду на отрезке $[a, b]$, то функция $f'(x)$ измерима на $[a, b]$.

БИЛЕТ 21.

1. Теорема Леви об ортогональной проекции. Разложение гильбертова пространства на прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.

2. Доказать, что непрерывные на отрезке $[a, b]$ эквивалентны тогда и только тогда, когда они равны.

БИЛЕТ 22.

1. Теорема Рисса-Фреше об общем представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве.

2. Доказать, что любая монотонная на отрезке $[a, b]$ функция измерима.

БИЛЕТ 23.

1. Ортонормированные системы. Ортогонализация по Шмидту. Неравенство Бесселя. Полнота и замкнутость ортонормированной системы. Слабая сходимость ортонормированной системы к нулю.

2. Доказать, что если множество E на прямой имеет меру $p > 0$, то для любого $q : 0 < q < p$ найдется множество $E_1 \subset E$, такое что $\mu(E_1) = q$.

БИЛЕТ 24.

1. Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Теорема об изоморфизме и изометрии всех сепарабельных гильбертовых пространств над одним полем.

2. Пусть на отрезке $[0, 1]$ заданы измеримые множества A_1 и A_1, такие что $\mu(A_1) + \mu(A_2) > 1$. Доказать, что $\mu(A_1 \cap A_2) > 0$.

БИЛЕТ 25.

1. Теорема Рисса-Фишера. Теорема о слабой компактности сепарабельного гильбертова пространства.

2. Какова мощность множества:
1) функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$,
2) всех действительных однозначных функций на отрезке $[0,1]$.

БИЛЕТ 26.

1. Сопряженный оператор. Теорема о сопряженном операторе. Теорема о прямой сумме замыкания образа линейного ограниченного оператора и ядра сопряженного.

2. Может ли открытое неограниченное множество на прямой иметь конечную меру?

БИЛЕТ 27.

1. Вполне непрерывный и компактный операторы. Свойства вполне непрерывного оператора.

2. Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции не более, чем счетно.

БИЛЕТ 28.

1. Первая теорема Фредгольма.

2. Существует ли $f(x) \in C[0,1]$, такая что:
1) $f([0,1]) = R$,
2) $f([0,1]) = (0,1)$,
3) $f([0,1]) = [-2,-1] \cap [1,2]$?

БИЛЕТ 29.

1. Вторая теорема(альтернатива) Фредгольма.

2. Можно ли построить на отрезке $[a,b]$ замкнутое множество, мера которого равна $b-a$, но которое отлично от всего отрезка $[a,b]$.

БИЛЕТ 30.

1. Третья теорема Фредгольма.

2. Пусть A открытое множество на прямой и пусть мера $\mu(A)$ этого множества равна $\alpha > 0$. Доказать, что для любого $\beta, 0 < \beta < \alpha$ существует открытое множество $A_\beta \subset A$ такое, что $\mu(A_\beta) = \beta$.

ПРОГРАММА КУРСА.

1. Открытые и замкнутые множества на прямой. Канторово множество и его свойства.

2. Свойства внешней меры. Измеримость открытого множества и счетного объединения измеримых множеств. Измеримость замкнутого множества, дополнения, разности и счетного пересечения измеримых множеств. Критерий измеримости.

3. Свойство σ-аддитивности меры. Множества типа $F\sigma$ и $G\delta$. Мера Лебега-Стилтьеса. Общее понятие меры. Примеh неизмеримого множества.

4. Измеримые функции и их свойства. Измеримость верхнего и нижнего пределов последовательности измеримых функций.

5. Измеримость предела сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций. Сходимость по мере. Теорема Лебега. Связь между сходимостью почти всюду и сходимостью по мере.

6. Теорема Рисса. Эквивалентность функций.

7. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Интегрируемость ограниченной и измеримой функции.

8. Свойства интеграла Лебега от ограниченной функции.

9. Интеграл Лебега от неограниченной и неотрицательной функции. Полная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Мажорантный признак суммируемости.

10. Интеграл Лебега от неограниченной функции любого знака. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

11. Теорема Леви и следствие из нее для рядов. Теорема Фату. Теорема Лебега-критерий интегрируемости.

12. Теорема Фубини. Интеграл Лебега для множества бесконечной меры.

13. Метрические пространства. Теорема о вложенных шарах.

14. Теорема Бэра о категориях. Принцип сжимающих отображений.

15. Классы Lp, p>1. Неравенства Гельдера и Минковского.

16. Полнота пространства Lp.

17. Плотность множества непрерывных функций в Lp. Непрерывность в метрике Lp.

18. Линейные нормированные пространства. Теорема Рисса.

19. Линейные операторы и их свойства. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов.

20. Теорема Банаха-Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности) и следствие из нее. Пример применения теоремы в теории рядов Фурье.

21. Обратный оператор. Достаточные условия существования обратного оператора.

22. Теорема Банаха об обратном операторе.

23. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала в линейном нормированном пространстве.

24. Общий вид линейного функционала в конкретных пространствах.

25. Слабая сходимость. Связь между сильной и слабой сходимостью. Критерий сильной сходимости.

26. Определение гильбертова пространства и его основные свойства. Теорема об элементе с наименьшей нормой.

27. Теорема Леви об ортогональной проекции. Разложение гильбертова пространства на прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.

28. Теорема Рисса-Фреше об общем представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве.

29. Ортонормированные системы. Ортогонализация по Шмидту. Неравенство Бесселя. Полнота и замкнутость ортонормированной системы. Слабая сходимость ортонормированной системы к нулю.

30. Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Теорема об изоморфизме и изометрии всех сепарабельных гильбертовых пространств над одним полем.

31. Теорема Рисса-Фишера. Теорема о слабой компактности сепарабельного гильбертова пространства.

32. Сопряженный оператор. Теорема о сопряженном операторе. Теорема о прямой сумме замыкания образа линейного ограниченного

оператора и ядра сопряженного.

33. Вполне непрерывный и компактный операторы. Свойства вполне непрерывного оператора.

34. Первая теорема Фредгольма о разрешимости уравнения Lx=f, где L=I-A, I-тождественный оператор, A-вполне непрерывный.

35. Вторая теорема (альтернатива Фредгольма).

36. Третья теорема Фредгольма

37. Спектральная теория в бесконечномерных пространствах. Понятие о точечном, непрерывном и остаточном спектре. Теоремы о непустоте спектра, его замкнутости и ограниченности. Теорема Гильберта-Шмидта.

Билет 1.

Мера интервала $\Delta = (a,b)$ $|\Delta| = b-a$

Покрытием $S = S(E)$ мн-ва E наз-ся $\forall$ счётная система интервалов $\{\Delta_n\}$ таких, что $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$

Сумма длин Δ_n $\sigma(S) = \sum_1^{\infty} |\Delta_n| \leq \infty$

Опр: Внешней мерой мн-ва E наз-ся величина $\inf_{S(E)} \sigma(S)$ и обознач $|E|^*$

Опр: Мн-во наз-ся измеримым (по Лебегу) если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists G$ - открытое мн-во содержащее E и $|G / E|^* < \varepsilon$

Т: Свойство σ-аддитивности меры.

Мера конечного или счётного числа попарно непересекающихся множеств равна сумме мер этих множеств.

▶ $\exists$ $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ $\quad E_i \cap E_j = \varnothing$ $i \neq j$.

Р-рим случай, когда все E_n - ограниченные.
В силу критерия измеримости $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall n$ найдётся содержащееся в E_n замкнутое мн-во F_n : $|E_n / F_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$

Т.к. все F_n замкнуты, ограничены и попарно не пересекаются, то справедливо $|\bigcup_{n=1}^{m} F_n| = \sum_{n=1}^{m} |F_n|$

Из ~~рав-ва~~ $E_n = (E_n \setminus F_n) \cup F_n$ и свойства внешней меры получаем $|E_n| \leq |E_n \setminus F_n| + |F_n| \leq |F_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{m} |E_n| \leq \sum_{n=1}^{m} |F_n| + \varepsilon$,

$\sum^{m} |E_n| \leq |\bigcup_1^{m} F_n| + \varepsilon$. Т.к. $\bigcup_1^{\infty} F_n$ содержится в E, то $\forall m$ справедливо $\sum_1^{m} |E_n| \leq |E| + \varepsilon$. Переходя к пределу $m \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ получим оценку $\sum_{n=1}^{\infty} |E_n| \leq |E|$. Неравенство в обратную сторону

следует из свойства внешней меры $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \Rightarrow$
$\Rightarrow |E|^* \le \sum_1^{\infty} |E_k|^*$

Опред: Мн-во E наз-ся мн-вом типа G_δ, если оно представимо в виде пересечения счётного числа открытых множеств.
Опр: Мн-во E ——— " ——— F_δ, если ——— " ——— объединения счётного числа замкнутых множеств.

Пример неизмеримого мн-ва:
C - окружность, длина 1 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
Отнесем к одному классу те точки, которые могут быть переведены одна в другую поворотом окружности C на угол $\pi n \alpha$. Каждый такой класс имеет мощность - счетная.
Из каждого такого класса выберем 1 точку и покажем, что это мн-во неизмеримо. - Φ_0
- Обозначим через Φ_n множество, получаемое из Φ_0 поворотом на $\pi n \alpha$
- Все Φ_n не пересекаются и из их объединением будет вся C.
- Если бы множество Φ_0 было бы измеримым, то были бы измеримы Φ_n. Предположим Φ_n-измер.

Так как $C = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n$ $\Phi_n \cap \Phi_n = \emptyset$ $n \ne m$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ в силу σ-аддитивности меры $1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_n|$

Так как $|\Phi_n| = |\Phi_0|$ то это равенство невозможно (или $|\Phi_0| > 0$ и $\Sigma = +\infty$ или $|\Phi_0| = 0$ и $\Sigma = 0$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ~~Φ_0~~ Φ_n и следовательно Φ_0 — не измеримы.

T1: Если $\{f_n(x)\}$ - последовательность измеримых на E функций, то нижний и верхний пределы этой последовательности измеримы на E

T2: Если $\{f_n(x)\}$ - посл. измер. на E функций, ~~что все~~ сходится почти всюду на E к функции $f(x)$, то $f(x)$ - измерима на E

- Если $\{f_n(x)\}$ сходится всюду на E, то это утв. следствие T1

Если $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ везде, кроме E_0 меры нуль, то $f(x)$ измерима на $E\setminus E_0$ по T1 и измерима на E_0 как на множестве меры нуль $\Rightarrow$ $f(x)$ измерима и на $E=(E\setminus E_0)\cup E_0$

Опр: Сходимость по мере: Пусть $f_n(x)$ $n=1,2,\dots$ и $f(x)$ измеримы на E и принимают на E почти всюду на E конечные значения.

Говорят, что $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ по мере на E, если $\forall\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists N(\varepsilon,\delta): \forall n>N \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| E[|f_n-f|\ge\varepsilon] \right|<\delta$$

или иными словами $\forall\varepsilon>0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left|E[|f_n-f|\ge\varepsilon]\right|=0$

T: Теорема Лебега

Пусть E - измеримое мн-во конечной меры

Пусть $f_n(x)$ и $f(x)$ - измеримы на E и почти всюду конечны

Тогда из сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ почти всюду на E следует сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ по мере.

▶ Положим $A = E[|f| = +\infty]$ $A_n = E[|f_n| = +\infty]$

$B = E \setminus E[\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f]$

$C = A \cup B \cup (\bigcup\limits_1^\infty A_n)$

Тогда по условию теоремы $|C|=0$ и всюду вне C ~~$\{f_n(x)\} \to f$~~ $f_n(x) \to f_n$ при $n\to\infty$ и все функции $f(x)$ и $f_n(x)$ принимают конечные значения

$\forall \varepsilon>0$ положим $E_n = E[|f_n - f| \geq \varepsilon]$, $R_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$.

Так как $E_n \subset R_n$ то $|E_n| \leq |R_n|$ и для док-ва теоремы достаточно доказать, что $|R_n| \to 0$ при $n\to\infty$

Обозначим $R = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n$ и покажем, что $|R_n| \to |R|$ при $n\to\infty$

По построению $R_{n+1} \subset R_n$ $\forall n$ и поэтому $R_n \setminus R = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} R_k \setminus R_{k+1}$, причём множества под знаком объединения не пересекаются $\Rightarrow |R_n \setminus R| = \sum\limits_{k=n}^{\infty} |R_k \setminus R_{k+1}|$ и в силу сходимости ряда $|R_1 \setminus R| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |R_k \setminus R_{k+1}|$ его остаток стремится к нулю, то есть $|R_n \setminus R| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и из равенства $|R_n| = |R_n \setminus R| + |R|$ следует, что $|R_n| \to |R|$. Для док-ва теоремы достаточно показать $|R|=0$, а для этого достаточно показать, что $R \subset C$

Пусть x_0 - любая точка и $x_0 \notin C \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(x_0, \varepsilon)$ такой, что $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $n>N$, т.е. при $n>N$ точка $x_0 \notin E_n$ ~~$\Rightarrow$~~ а значит $x_0 \notin R_n$ и $x_0 \notin R$.

Вложение установлено, теорема доказана.

Замечание: из сходимости $f_n(x) \to f(x)$ по мере не следует сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ не только почти всюду, но и даже сходимость в одной точке.

Пример: $I_1 = [0,1]$

$I_2 = [0, \frac{1}{2}]$ $I_3 = [\frac{1}{2}, 1]$

$I_3 = [0, \frac{1}{4}]$ ...

$f_n = 1$ на I_n

~~сходимос~~ сходимость по мере есть но в $[0,1]$ f_n ~~$\to 0$~~ расходится.

$\exists E$ - измеримое мн-во $|E| < +\infty$, $T = \{E_1 \dots E_n\}$ - разбиение, если $E_i \cap E_j = \varnothing$ $i \neq j$ $E = \bigcup\limits_1^n E_k$

$\exists$ $f(x)$ - ограничена на E.

$\forall$ разбиения обозначим $M_k = \sup\limits_{x \in E_k} f(x)$ $m_k = \inf\limits_{x \in E_k} f(x)$

$S_T = \sum\limits_1^n M_k |E_k|$ $s_T = \sum\limits_1^n m_k |E_k|$ - верхн и нижн суммы Лебега.

$\overline{I} = \inf\limits_T S_T$ $\underline{I} = \sup\limits_T s_T$ - верхний и нижний интегралы Лебега.

Т: Всякая ограниченная и измеримая на измеримом мн-ве конечной меры функция интегр. на нём по Лебегу.

▷ Построим специальное лебеговское разбиение мн-ва E. $\exists$ $m = \inf\limits_E f(x)$ $M = \sup\limits_E f(x)$. Разобьём отрезок $[m, M]$ точками $m = y_0 < y_1 < \dots y_n = M$ и положим $\delta = \max \Delta y_k$ $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

Лебеговским разбиением мн-ва E назовём разбиение $T = \{E_k\}_{k=1}^n$ $E_1 = E[y_0 \leq f(x) \leq y_1]$, $E_k = E[y_{k-1} < f(x) \leq y_k]$

Все мн-ва измеримы, т.к. функция $f(x)$ - измерима

$\exists$ s_T S_T - нижняя и верхняя суммы, отвечающие разб T

$\forall k$ имеет место: $y_{k-1} \leq m_k \leq M_k \leq y_k$. Умножая это тройное нер-во на $|E_k|$ и суммируя по k получим $\sum\limits_{k=1}^n y_{k-1} |E_k| \leq s_T \leq S_T \leq \sum\limits_1^n y_k |E_k|$. Отсюда

$0 \leq S_T - s_T \leq \sum\limits_1^n (y_k - y_{k-1}) |E_k|$, а т.к. $\forall$ разбиения T

$s_T \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S_T$, то $0 \leq \overline{I} - \underline{I} \leq \delta |E|$. В силу произвольности δ получаем $\underline{I} = \overline{I}$

◼

Свойства интеграла Лебега:

I $\int\limits_E 1 dx = |E|$,

II Если f - огранич., интегрир на E, α - люб число, то αf - интегр. на E

$\int_E \alpha f(x)dx = \alpha \int_E f(x)dx$

▸ Пусть ∀ разбиения T : s_T S_T s_T^α S_T^α - нижние и верхние суммы для f и αf

Тогда: $s_T^\alpha = \begin{cases} \alpha S_T & \alpha \geq 0 \\ \alpha s_T & \alpha < 0 \end{cases}$ $\quad S_T^\alpha \begin{cases} \alpha s_T & \alpha \geq 0 \\ \alpha S_T & \alpha < 0 \end{cases}$

Из интегр $f \Rightarrow \underline{I} = \overline{I} = \int_E f(x)dx$. значит $\underline{I}^\alpha = \overline{I}^\alpha = \alpha \int_E f(x)dx$

III Если f_1 и f_2 - огран и интегр на E $|E| < +\infty$, то $f_1 + f_2$ - интегр на E и $\int_E f_1 + f_2 = \int_E f_1 + \int_E f_2$

▸ Пусть $f(x) = f_1 + f_2$ и T - произв. разбиение E. Имеем место: $m_k^1 + m_k^2 \leq m_k \leq M_k \leq M_k^1 + M_k^2 \Rightarrow s_T^1 + s_T^2 \leq s_T \leq S_T \leq S_T^1 + S_T^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{I}^1 + \underline{I}^2 \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq \overline{I}^1 + \overline{I}^2$. Из интегр f_1 и $f_2 \Rightarrow \underline{I}^1 = \overline{I}^1 = \int_E f_1$

$\underline{I}^2 = \overline{I}^2 = \int_E f_2$, откуда ~~это~~ следует интегр $f(x)$: $\underline{I} = \overline{I} = \int_E f$

Из ▸ II и III $\Rightarrow \int_E \alpha f_1 + \beta f_2 = \alpha \int_E f_1 + \beta \int_E f_2$

IV Если f - огр и инт на E_1 и E_2; $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ $|E_i| < +\infty$, то f - интегр на $E = E_1 \cup E_2$ и $\int_E f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$: ~~Это~~

▸ Это следует из того, что любое разбиение мн-ва E распадается на T_1 и T_2 для E_1 и E_2, а их объединение - разбиение E. ■

V Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - огр. и инт. на E $|E| < +\infty$ и $f_2 > f_1$ п.в. то $\int_E f_1 \geq \int_E f_2$ ▸ т.к. все нижние суммы $f_1 - f_2$ неотрицательные.

№4

Интеграл Лебега от неограниченной и неотрицательной функции

Пусть $f(x) \geq 0$ всюду на E $|E| < +\infty$ $f(x)$ - измерима, возможно не ограничена.

$\forall N > 0$ положим $f_N(x) = \min\{N, f(x)\}$

Функция $f_N(x)$ - измерима на E:

$$E[f_N(x) > a] = \begin{cases} E[f > a], & \text{при } a < N \\ \varnothing, & \text{при } a \geq N \end{cases}$$

Причем $f_N(x)$ - ограничена и измерима на E =>

=> $\exists \; I_N(f) = \int\limits_E f_N(x)\,dx$

Опр: Если при $N \to \infty$ $\exists \lim\limits_{N\to\infty} I_N(f) < +\infty$, то $f(x)$ называется суммируемой на мн-ве E, а этот предел наз-ся интегралом $f(x)$ на E и обозначается $\int\limits_E f(x)dx = I(f)$

Для неотр. суммируемых функций справедливо II – V

Т: Полная аддитивность интеграла Лебега

Пусть $E = \bigcup\limits_1^\infty E_k$ $|E| < +\infty$ $E_i \cap E_j = \varnothing$ $i \neq j$ все E_k - измеримы

Тогда 1) если $f(x) \geq 0$ и $f(x)$ суммируема на E, то $f(x)$ суммируема на E_k причём

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_1^\infty \int\limits_{E_k} f(x)dx \quad (*)$$

2) если $f(x) \geq 0$ $f(x)$ - сум. на всех E_k и ряд в $(*)$ сходится то $f(x)$ суммир. на E и справедливо рав-во $(*)$

Докажем (1) (2) для неотриц. и огранич. $f(x)$, Пусть $0 \leq f(x) \leq M$

Положим $R_n = \bigcup\limits_{k=n+1}^\infty E_k$, $|R_n| = \sum\limits_{n+1}^\infty |E_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\int\limits_E f(x)dx - \sum\limits_1^n \int\limits_{E_k} f(x)dx =$

$= \int\limits_{R_n} f(x)dx \leq M \int\limits_{R_n} dx = M|R_n| \to 0$

Теперь $(*)$ докажем для неогр. $f(x)$

$\exists f(x) \geq 0$ - суммир. неогран. функция на E. В силу

$\int_{E_k} f dx \leq \int_E f dx$ следует суммир. на E_k.

Докажем $(*)$

Из нер-ва $f_N(x) \leq f(x)$ вытекает оценка (в силу справедливости Т для случая огр. функции)

$(**)$ $\int_E f_N(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f_N(x)dx \leq \sum_1^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx$

Переходя к пределу $N \to \infty$ получим

$$\int_E f(x)dx \leq \sum_1^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx$$

С другой стороны, $\forall m \in \mathbb{N}$ $\int_E f_N(x)dx = \sum_1^{\infty} \int_{E_k} f_N dx \geq \sum_1^{m} \int_{E_k} f_N dx$

Устремив $N \to \infty$, затем $m \to \infty$ получим $\int_E f(x)dx \geq \sum_1^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx$,

что доказывает справедливость $(*)$

Для док-ва 2) достаточно обосновать суммир. $f(x)$ на E

т.к. $(*)$ уже доказана. Но суммир. следует из $(**)$ и

из сходимости ряда в правой части. ■

Т: Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.

Если $f(x) \geq 0$ и суммир. на E $|E| < +\infty$, то $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta$ такое, что каково бы ни было измеримое мн-во

$e \subset E$ с мерой $|e| < \delta$ справедливо $\int_e f(x)dx < \varepsilon$

▸ Т.к. f - суммир. на E, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$:

$\int_E [f(x) - f_N(x)]dx < \frac{\varepsilon}{2}$, поэтому в силу $f_N(x) \leq N$

справедливо: $\int_e f(x)dx = \int_e [f(x) - f_N(x)]dx + \int_e f_N(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} + N|e| = \varepsilon$

при $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$

■

Т: Мажорантный признак:

Если $f_1(x) \ge 0$ - измерима на E $|E|<+\infty$

f_2 - суммируема на E и, если всюду на E выполняется рав-во $f_1(x) \le f_2(x)$, то $f_1(x)$ суммир. на E и справедлива $\int_E f_1(x)dx \le \int_E f_2(x)dx$

▶ Справедливость следует из

$$\int_E f_{1N}(x)dx \le \int_E f_{2N}(x)dx \le \int_E f_2(x)dx$$

~~№ 6.~~

~~Теорема Лебега~~

№ 5.

$\exists\, |E| < +\infty$ $f(x)$ - измеримая функция E

$\exists\, f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$, f^+ и f^- - измеримы на E

$f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$

Справедливо: $f^+ + f^- = |f(x)|$, $f^+ - f^- = f(x)$

Опр: Измеримая $f(x)$ наз-ся суммир на E, $|E| < +\infty$, если на E суммируемы обе неотрицательные f^+ и f^-. При этом интегралом Лебега от $f(x)$ наз-ся разность $\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx$

Опр: Совокупность всех суммир. на измер. множестве E функций обозначается $L(E) \equiv L_1(E)$. Говорят, что последовательность $f_n(x) \in L(E)$ сходится (в среднем) в $L(E)$ к $f(x) \in L(E)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|dx = 0$.

Т: Теорема Лебега

Пусть ф-ии $f_n(x)$ почти всюду конечны и измеримы на измеримом мн-ве E конечной меры и f_n сходится по мере к измеримой и почти всюду конечной функции $f(x)$

Если существует суммир. на E $F(x)$, такая что $\forall n$ и почти всех точек $x \in E$ справедливо $|f_n(x)| < F(x)$, то последовательность сходится к $f(x)$ в среднем, т.е. в $L(E)$

▷ Пусть $f_n(x)$ почти всюду конечны и измеримы на измеримом множестве E конечной меры и эта послед. сход. по мере к измеримой и п.в. конечной $f(x)$. Тогда по Т. Рисса можно выделить подпоследовательность, сход к $f(x)$

Переходя в нер-ве $|f_{n_k}| \le F(x)$ к пределу получим

$|f(x)| \le F(x)$ для почти всех точек x из мн-ва E.

В силу теоремы (мажорантный признак) не только $f_n(x)$ суммируемы на E, но и $f(x)$

Теперь $\forall \varepsilon > 0$ положим $E_n = E[|f_n - f| \ge \varepsilon]$

Очевидно, что $|f_n(x) - f(x)| \le 2F(x)$

Тогда $\int\limits_E |f_n - f|\, dx = \int\limits_{E_n} |f_n - f|\, dx + \int\limits_{E \setminus E_n} |f_n - f|\, dx \le 2 \int\limits_{E_n} F(x)dx + \varepsilon |E| <$

$< C\varepsilon$, т.к. интеграл от $F(x)$ в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега стремится к нулю при $n \to \infty$. Теорема доказана.

$\blacksquare$

№6.

Теорема Леви

Пусть $f_n(x)$ - суммируемые на E функции $|E|<+\infty$

Пусть $\forall n\in\mathbb{N}$ выполнено $f_n(x)\le f_{n+1}(x)$ для п.в. $x\in E$

Если $\exists$ M, такая, что $\forall n\in\mathbb{N}$ выполнено $\left|\int\limits_E f_n(x)dx\right|\le M$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится п.в. на E

к некоторой функции $f(x)$, причём $f_n(x)\in L(E)$ и

$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)dx=\int\limits_E f(x)dx$

▷ Не ог. общности, считаем $f_n(x)\ge 0$ п.в. на E ($f_n\to g_n=f_n-f_1\ge 0$). Т.к. $\{f_n(x)\}$ не убывает п.в. на E, то для почти всех $x\in E$ определена предельная функция $f(x)$, которая в этих точках принимает конечные или бесконечные значения. Если докажем, что $f(x)$ п.в. конечна на E ~~по мере на E~~ и $f_n\to f$ по мере на E в силу теоремы 5 § 83. Отсюда в силу нер-ва $f_n(x)\le f(x)$ п.в. на E и теоремы Лебега получим рав-во $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)dx=\int\limits_E f(x)dx$

Таким образом достаточно доказать суммируемость $f(x)$ на E

$\forall N>0$ $\{$ последовательность $\{f_{nN}(x)\}$ сходится к $f_N(x)$ п.в. на E, причем ограниченная функция $f_N(x)$ суммир. на E и для п.в. $x\in E$ выполнено

$f_{n,N}(x)\le f_N(x)$. Применяя Теорему Лебега получим

$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_{nN}(x)dx=\int\limits_E f_N(x)dx$ Отсюда из нер-ва

$\int\limits_E f_n(x)dx\ge\int\limits_E f_{n,N}(x)dx$, следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)dx\ge\int\limits_E f_N(x)dx$,

а так как $\int\limits_E f_n(x)dx\le M$ для всех n, то и $\int\limits_E f_N(x)dx\le M$

Из последнего нер-ва и из неубывания интеграла в нём по n вытекает существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx$, что означает суммируемость. ■

Следствие для функц. рядов.

Если все функции $u_n(x)\geq 0$ почти всюду на E, суммируемы на E и сходится ряд $\sum\limits_1^\infty \int_E u_n(x)dx$, то почти всюду на E сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n(x)$, причем сумма $S(x)$ ряда суммир. на E и $\int_E S(x)dx = \sum\limits_{n=1}^\infty \int_E u_n(x)dx$, т.е. ряд можно интегрировать почленно.

Здесь в качестве $f_n(x)$ берём частичную сумму $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^n u_k(x)$

Теорема Фату.

Если послед. $f_n(x)$ измер. и суммир. на измеримом множестве E функций, сходится п.в. на E к предельной функции $f(x)$ и если существует постоянная A ($\forall$) такая, что для всех номеров n выполняется $\int_E |f_n(x)|dx \leq A$, то функция $f(x)$ суммируема на E и справедливо нер-во $\int_E |f(x)|dx \leq A$

▶ Положим $g_n(x) = \inf\limits_{k\geq n} |f_k(x)|$. Функция $g_n(x)$ измеримы на мн-ве E (по некой предыдущей теореме). Последовательность этих функций не убывает на E и сходится к $|f(x)|$ п.в. на E. Кроме того, $\forall n$ всюду на E справедливо $g_n(x)\leq |f_n(x)|$, поэтому в силу мажорантного признака каждая функция $g_n(x)$ - суммир. на E и $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E g_n(x)dx \leq A$ получим и оценку $\int_E |f(x)|dx \leq A$. ■

Теорема Лебега Критерий интегрируемости.

Для того, чтобы ограниченная на измеримом множестве конечной меры E функция $f(x)$ являлась интегрируемой по Лебегу на E $\Leftrightarrow$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была измерима на E

достаточность — билет 3.

необходимость

Пусть $f(x)$ ограничена и интегрируема на E т.е. верхний и нижний интегралы совпадают $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ последовательность разбиений $T_n = \{E_k^n\}$, что соотв. последовательности $\{S_n\}$ и $\{s_n\}$ удовлетворяют $S_n - s_n < \frac{1}{n}$, причем каждое разбиение T_n является измельчением T_{n-1}

По определению: $S_n = \sum\limits_k M_k^n |E_k^n|$ $\quad s_n = \sum\limits_k m_k^n |E_k^n|$, где M_k^n и m_k^n - точная верхняя и нижняя грани функции $f(x)$ на E_k^n. Определим последовательности функций $\overline{f}_n(x)$ и $\underline{f}_n$ положив $\overline{f}_n(x) = M_k^n$ $\underline{f}_n(x) = m_k^n$ на множестве E_k^n. Ясно, что функции $\overline{f}_n(x)$ и $\underline{f}_n(x)$ измеримы на E, т.к. принимают на E конечное число значений, причем последовательность функций $\overline{f}_n$ не возрастает, $\underline{f}_n(x)$ - не убывает и справедливо $\underline{f}_n(x) \le f(x) \le \overline{f}_n$

Положим $\overline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f}_n(x)$ и $\underline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{f}_n(x)$

По теореме Леви:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E [\overline{f}_n(x) - \underline{f}_n(x)]\,dx = \int_E [\overline{f}(x) - \underline{f}(x)]\,dx$$

Из определения $\overline{f}_n$ и $\underline{f}_n$ вытекает, что $\int_E [\overline{f}_n(x) - \underline{f}_n(x)]\,dx = S_n - s_n < \frac{1}{n}$

Отсюда следует, что $\int[\overline{f}(x)-\underline{f}(x)]dx = 0$, а значит по теореме ? $\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$ п.в. на E

А так как $f_n(x)$ и $f_n(x)$ измеримы, то и функция $f(x)$ измерима на множестве E. ■

№7.

Пусть измеримое мн-во E имеет бесконечную меру $|E| = +\infty$. Р-рим $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где E_n измеримы и $|E_n| < +\infty$. Последовательность $\{E_n\}$ называется исчерпывающей для E

Измеримая $f(x)$ на измеримом мн-ве E бесконечной меры наз-ся суммир. на этом мн-ве, если она суммир. на любом измеримом подмножестве конечной меры $E_n \subset E$ и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{k=1}^{n} E_k} f(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

независимо от выбора исчерпывающей последовательности.

Все основные свойства интеграла Лебега сохраняются.

Теорема Фубини:

Пусть $f(x,y)$ интегрируема по Лебегу на прям-уг. $P = \{(x,y): a<x<b,\ c<y<d\}$, тогда для п.в. $c<y<d$ $\exists$ интеграл $J(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ и для п.в. $a<x<b$ существует $I(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$, причем $J(y)$ интегрируема на (c,d), а $I(x)$ на (a,b) и справедливо рав-во:

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d J(y)\,dy = \int_a^b I(x)\,dx$$

В обратную сторону теорема вообще говоря не работает

Пример

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad P = [-1,1]\times[-1,1], \text{ доопр. в нуле нулём.}$$

Эта функция нечётная по x, y, поэтому $I(y)$ и $I(x)$ равны нулю.

Если бы она была интегрируема, то был бы интегрируем её модуль и

$$\iint_P |f(x,y)|\,dx\,dy \geqslant \iint_{x^2+y^2<1} \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} |\sin\varphi\cos\varphi|\,d\varphi \int_0^1 \frac{dr}{r} = +\infty$$

В №8.

Опр: Множество M называется метрическим пр-вом если каждой паре его эл-тов x и y поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x,y)$ удовлетворяющее:

1) $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$
3) $\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$

Опр. Эл-т $x\in M$ наз-ся пределом послед-ти $x_1,\dots x_n,\dots$, если $\rho(x_n,x)\to 0$ при $n\to\infty$

Опр: Если в пр-ве метрич. M $\forall$ фундам. послед. сх. к пределу $\in M$, то M - полное.

Опр: Послед-ть фундаментальна, если $\rho(x_n,x_m)\to 0$ при $n,m\to\infty$

Утв1: Если $\{x_n\}$ метр пр-ва M сход к $x\in M$, то $\forall$ п/п $\{x_{n_k}\}$ сход к x

Утв2: Последовательность $\{x_n\}$ метр пр-ва M может сход. ~~не~~ не. более чем к 1-му пределу

Утв3: Если $\{x_n\}$ метр пр-ва M сх. к $x\in M$, то эта послед. ограничена в том смысле, что числа $\rho(x_n,z)$ ограничены $\forall z\in M$

Назовём шаром (замкнутым) с центром в т. $a\in M$ и радиусом r совокупность точек M: $\rho(x,a)<r$ ($\rho(x,a)\le r$) Будем обозначать его $B(a,r)$ ($\overline{B(a,r)}$)

Назовём окрестностью точки любой шар с центром в этой точке.

~~Опр М~~ Пусть дано множество X метрического пр-ва M. Точка $a \in M$ - предельная, если любая окрестность a содержит хотябы одну точку мн-ва $X \setminus \{a\}$

Мн-во, получаемое присоединением к X всех его предельных точек - замыкание X - $\overline{X}$

Мн-во замкнуто, если $X = \overline{X}$

Мн-во открыто, если $M \setminus X$ замкнуто

Мн-во X всюду плотно в пр-ве M, если $\overline{X} = M$

Мн-во X наз-ся нигде не плотным ~~если~~ в пр-ве M, если каждый шар этого пр-ва содержит в себе шар свободный от точек мн-ва X

Т. О вложенных шарах:

Пусть дана в ~~полном~~ полном метр. пр-ве M послед. замкнутых шаров вложенных друг в друга, радиусы которых $\to 0$. Тогда $\exists!$ точка, принадлежащая всем шарам.

▷ Пусть р-рим шары $\overline{B_1(a_1, r_1)} \supset \dots \supset \overline{B_n(a_n r_n)} \supset \dots$

Р-рим послед. $a_1 \dots a_n \dots$ - центров шаров.

Т.к. $\overline{B_{n+p}} \subset \overline{B_n} \Rightarrow a_{n+p} \in \overline{B_n(a_n, r_n)}$, поэтому

$\rho(a_{n+p}, a_n) \leq r_n \Rightarrow \rho(a_{n+p}, a_n) \to 0$ при $n \to \infty$ -

т.е. послед. фундаментальна.

Т.к. M - полное ~~пр~~, то послед. сходится к некоторому пределу $a \in M$. Возьмём любой шар $B_n(a_n r_n)$, тогда точки $a_n \dots a_{n+k} \dots$ ~~пред~~ принадлежат ему. В силу замкнутости шара предельная точка принадлежит ему. Допустим $\exists$ b принадлежащая всем шарам и ~~b≠a~~ отличная от a $\rho(a,b) = \delta > 0$. Т.к. $a, b \in \overline{B_n(a_n, r_n)}$, то

■ $\delta = \rho(a,b) \leq \rho(a, a_n) + \rho(b, a_n) \leq 2r_n$, что невозможно т.к. $r_n \to 0$

+ повторить экзамен 8.

№9.

Опр.4: Множество M наз-ся мн-вом 1-ой категории, если оно может быть представлено в виде суммы не более чем счётного числа нигде не плотных множеств.

Мн-во не явл. мн-вом 1-ой кат. является мн-вом 2-ой категорией

Теорема (Бэра о категориях)

Полное метрическое пр-во есть мн-во 2-ой категории

▷ Предположим противное и допустим, что полное пр-во представимо в виде $X = \cup_{n=1}^{n} M_n$, где M_n $n=1 \dots n \dots$ нигде не плотны

Возьмём шар $\overline{B(a,1)}$ с центром в произвольной точке a. Т.к. M_1 нигде не плотно, то внутри $\overline{B(a,1)}$ найдётся $\overline{B(a_1, \frac{1}{2})}$ не содержащий точек M_1. Т.к. M_2 нигде не плотно ~~так~~ найдётся шар $\overline{B(a_2, \frac{1}{3})}$ не содержащий точек мн-ва M_2, и т.д...

Получим: $\overline{B(a_1, \frac{1}{2})}, \dots \overline{B(a_n \frac{1}{n+1})} \dots$, причем каждый шар вложен в предыдущий и их радиусы стремятся к нулю. При этом $B_1(a_n \frac{1}{n+1})$ не содержит точек мн-ств $M_1 \dots M_n$. По теореме о вложенных шарах $\exists a_0 \in X$ и принадлежащая всем шарам. С другой стороны a_0 не принадлежит ни одному из множеств M_n а, значит не

◁ принадлежит пр-ву X (!)

Т: Принцип сжимающих отображений.

Пусть в полном метрическом пр-ве M задан оператор A, переводящий эл-ты пр-ва M в эл-ты этого же пр-ва. Пусть $\rho(A(x), A(y)) \leq$ $\leq \alpha \rho(x,y)$; $\alpha \in [0,1)$

Тогда $\exists!\, x_0 : A(x_0) = x_0$. Эта точка наз-ся неподвижной точкой оператора A. Сам этот оператор наз-ся оператором сжатия.

▷ Зафиксируем $x \in M$ и положим $x_1 = A(x) \ldots$ $\ldots x_n = A(x_{n-1})$. Докажем, что $\{x_n\}$ - фундаментальная. Для этого заметим

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(A(x), A(x_1)) \leq \alpha \rho(x, x_1) = \alpha \rho(x, A(x))$$

$$\rho(x_2, x_3) = \rho(A(x_1), A(x_2)) \leq \alpha \rho(x_1, x_2) = \alpha^2 \rho(x, A(x))$$

$$\ldots$$

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n \rho(x, A(x))$$

Далее:

$$\rho(x_n ; x_{n+p}) \leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots +$$

$$+ \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq (\alpha^n + \ldots \alpha^{n+p-1}) \rho(x, A(x)) =$$

$$= \frac{\alpha^n - \alpha^{n+1}}{1-\alpha} \rho(x, A(x)) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x, A(x))$$

Из этой оценки следует, что $\rho(x_n, x_{n+p}) \to 0$, при $n \to \infty$ и $p \to \infty$. В силу полноты M $\exists x_0 \in M$, такой, что $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Покажем, что $A(x_0) = x_0$: $\rho(x_0, A(x_0)) \leq \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, A(x_0)) =$ $= \rho(x_0, x_n) + \rho(A(x_{n-1}), A(x_0)) \leq \rho(x_0, x_n) + \alpha \rho(x_{n-1}, x_0)$. При достаточно больших n выполняется $\rho(x_{n-1}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2\alpha}$, $\rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \rho(x_0, A(x_0)) < \varepsilon \Rightarrow \rho(x_0, A(x_0)) = 0 \Rightarrow A(x_0) = x_0$.

Единственность: $\exists\, x_0, y_0 \in M : A(x_0) = x_0$ $y_0 = A(y_0) \Rightarrow \rho(x_0, y_0) = \rho(A(x_0), A(y_0)) \leq$ $\leq \alpha \rho(x_0, y_0)$

◻ а это возможно при $\alpha < 1$ только в случае $\rho(x_0, y_0) = 0$

Классы L_p $p>1$.

Опр: Мн-во всех измеримых на E функций $f(x)$, для которых функции $|f(x)|^p$ суммир. на E, наз-ся пространством $L_p(E)$

Норма в пр-ве $L_p(E)$ вводится по формуле
$\|f(x)\|_{L_p(E)} = \|f(x)\|_p = (\int\limits_E |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$

Если $\|f(x)\|_p = 0$ $f(x) \sim 0$, поэтому в этом пр-ве эл-ты считаются равными, если они эквивалентны.
Остаётся проверить аксиому треугольника.
В случае $p=1$ - очевидно, при $p>1$ докажем нер-во Гельдера, затем нер-во ~~Коши~~ Минковского

Если $p>1$, число q связано с ним по формуле
$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f(x)\in L_p(E)$ $g(x)\in L_p(E)$, то $f(x)\cdot g(x)$ суммир. на E и справедливо нер-во Гельдера $\int\limits_E |f(x)g(x)|dx \leq$

$\leq \|f(x)\|_{L_p(E)} \|g(x)\|_{L_p(E)}$
Для доказательства введём в рассмотрение на мн-ве $x>0$ $\varphi(x) = x^\alpha - \alpha x$ $\alpha\in(0,1)$. $\varphi'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha = \alpha(x^{\alpha-1}-1)$
$\varphi'(x)>0$ при $x\in(0,1)$ $\varphi'<0$ при $x>1$ $\to$ $\varphi(x)$ достигает максимума $x=1$. Запишем нер-во $\varphi(x)\leq\varphi(1)$ в виде
$x^\alpha \leq \alpha x + 1 - \alpha$ и положим $x=\frac{a}{b}$, $a\geq 0$ $b>0$. Получим соотношение $a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b$, справедливо $\forall a\geq 0$ $\forall b>0$. Если $\alpha=\frac{1}{p}$ то $1-\alpha = \frac{1}{q}$. В результате получим нер-во ~~Юнга~~ Юнга $a^{\frac{1}{p}}\cdot b^{\frac{1}{q}} = \frac{a}{p}+\frac{b}{q}$
В случае $f(x)\sim 0$ $g(x)\sim 0$ нер-во Гельдера очевидно
$\exists$ $f(x)\nsim 0$ $g(x)\nsim 0$ положим $a = \frac{|f(x)|^p}{\|f(x)\|_p^p}$ $b=\frac{|g(x)|^q}{\|g(x)\|_q^q}$

В результате нер-во Юнга примет вид.

$$|f(x)g(x)| \le \|f(x)\|_p \|g(x)\|_q \left(\frac{|f(x)|^p}{p\|f(x)\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|f(x)\|_q^q} \right)$$

Правая часть соотношения суммир. на E ~~и левая часть, т.е. $f(x)g(x)$~~ поэтому в силу мажорантного признака суммируема левая часть. Интеграл от функции в скобках правой части равен 1. В итоге нер-во Гельдера доказано

Если $p \geq 1$ $f, g \in L_p(E)$, то $|f(x)+g(x)|^p$ суммир. на E и справедливо нер-во Минковского $\|f+g\|_{L_p(E)} \le \|f(x)\|_{L_p(E)} +$

$+ \|g(x)\|_{L_p(E)}$

▷ Суммир. функций $|f(x)+g(x)|^p$ вытекает из нер-ва $|a+b|^p \le 2^p(|a|^p + |b|^p)$, которое справедливо $\forall a, b$.
Также было отмечено, что нер-во Минковского верно $p=1$, проверим и случай $p>1$

Воспользуемся нер-вом Гельдера, заменив $g(x)$ на $|f(x)+g(x)|^{p/q}$

$$\int_E |f(x)||f(x)+g(x)|^{p/q} dx \le \|f(x)\|_{L_p(E)} \|f(x)+g(x)\|^{p/q}_{L_p(E)},$$

заменим $f(x)$ на $g(x)$ и $g(x)$ на $|f(x)+g(x)|^{p/q}$ снова,

$$\int_E |g(x)||f(x)+g(x)|^{p/q} dx \le \|g(x)\|_{L_p(E)} \|f(x)+g(x)\|^{p/q}_{L_p(E)}$$

Используя выведенные нер-ва в следующей цепочке

$$\|f(x)+g(x)\|^p_{L_p(E)} = \int_E |f(x)+g(x)|^p dx \le \int_E [|f(x)|+|g(x)|]\,|f(x)+g(x)|^{p/q} dx \le$$

$$\le \left[\|f(x)\|_{L_p(E)} + \|g(x)\|_{L_p(E)}\right] \|f(x)+g(x)\|^{p/q}_{L_p(E)}.$$ Учитывая $p - \frac{p}{q} = 1$ получаем нер-во Минковского, которое подтверждает справедливость аксиомы треугольника в $L_p(E)$

№11

Полнота $L_p(E)$

Опр: Послед $\{f_n\}$ эл-тов нормированного пр-ва наз-ся фундаментальной, если послед. $\|f_m - f_n\| \to 0$ при $m,n \to \infty$

Опр: Послед $\{f_n\}$ ——— " ——— сходящейся, если в этом пр-ве существует элемент f такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$

Опр: Норм. пр-во наз-ся полным (Банаховым), если любая фундаментальная послед. в этом пр-ве является сходящейся

Т: Пр-во $L_p(E)$ $|E| < +\infty$ $p \geq 1$ является полным.

▶ Пусть $\{f_n\}$ произв. фунд. послед в $L_p(E)$. $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_k$: для всех $m \geq n_k$ $n \geq n_k$ выполняется $\|f_m - f_n\| < \frac{1}{2^k}$.

Можно считать, что $n_1 < n_2 < \ldots < \ldots$, тогда $\|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$. В силу нер-ва Гельдера.

$$\int_E |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\,dx \leq \|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\|_p \left\{\int_E 1^q dx\right\}^{\frac{1}{q}} \leq$$

$\leq \frac{1}{2^k} |E|^{\frac{1}{q}}$. Из этого соотношения $\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\,dx \leq |E|^{\frac{1}{q}} \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^k} = |E|^{\frac{1}{q}},$$

которое по следствию из теоремы Леви гарантирует сходимость почти всюду на E ряда $\sum\limits_1^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ и тем более ряда $f_{n_1} + \sum\limits_1^{\infty} [f_{n_{k+1}} - f_{n_k}]$

Это означает, что k-ая по частичная сумма этого ряда равная $f_{n_{k+1}}(x)$ сходится почти всюду на E к некоторой функции $f(x)$. ~~Тогд.~~ Далее, $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N : \forall m > N, \forall n_k > N$ выполнено $\|f_m(x) - f_{n_k}(x)\|_p < \varepsilon$,

а поскольку последовательность $[f_m(x) - f_{n_k}(x)]$ сходится п.в. на E к функции $[f_m - f]$ при $k \to \infty$, то по Т. Фату $[f_m - f] \in L_p(E)$ и выполнено $\|f_m - f\|_p \leq \varepsilon$ для всех $m \geq N$. Отсюда в силу нер-ва Минковского следует интегрируемость $f(x) \in L_p(E)$ и ~~сход~~ сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ в метрике $L_p(E)$

■

№12

Плотность мн-ва непрерывных функций в L_p.

Т: Пусть E - огранич. измер. мн-во, $p \geq 1$. Тогда пространство непрерывных на E функций $C(E)$ плотно в $L_p(E)$

▶ Необходимо доказать, что $\forall f(x) \in L_p(E)$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $\varphi(x) \in C(E)$: $\|f(x) - \varphi(x)\|_p < \varepsilon$. Так как $f(x) = f^+ + f^-$, то теорему доказать для $f \geq 0$. Принадлежность $f(x) \in L_p(E)$ означает, что $f(x)$ п.в. конечна на E и мн-во $F_0 = E[f = +\infty]$ можно пренебречь. В силу к следствию леммы 1 $\exists$ неубывающая послед. $\{f_n(x)\}$ простых неотриц. функций $f_n(x)$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in L_p(E)$. Поэтому согласно теореме Лебега (билет 5), о сходимости в среднем. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N : \forall n > N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\|_p < \varepsilon$, таким образом достаточно установить существование функции $\varphi(x) \in C(E)$, удовлетвор. $\forall$ для любого $\varepsilon > 0$ нер-ву $\|f_N(x) - \varphi(x)\|_p$, для $f_N(x) = \sum\limits_1^m C_k \chi_{E_k}(x)$ - произвольная простая функция, принимающая конечное число значений.

Для каждого множества E_k существует содержащееся в нём замкнутое мн-во F_k и такое, что $|E_k \setminus F_k| < \varepsilon_k^*$, где ε_k - любое положительное число. При этом выполняется $\|\chi_{E_k}(x) - \chi_{F_k}(x)\|_p = |E_k \setminus F_k|^{\frac{1}{p}} < \varepsilon_k$. Обозначим через $r_k(x) = \rho(x, F_k)$ - функцию расстояния от $x \in E$ до мн-ва F_k. Ясно, что $r_k(x)$ - непрерывна на E. χ_{F_k} перепишем в виде:

$$\chi_{F_k}(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_k^{(n)}, \text{ где } \varphi_k^{(n)} = \frac{1}{1+n r_k(x)} = \begin{cases} 1, & x \in F_k \\ \frac{1}{1+n r_k(x)}, & x \notin F_k \end{cases}$$

Послед-ность $\{\varphi_k^{(n)}(x)\}$ не возрастает с номером n, причём справедливо $|\chi_{F_k}(x) - \varphi_k^{(n)}| \le 1$ и в силу т. Лебега о сходимости в среднем будет выполняться нер-во $\|\chi_{F_k}(x) - \varphi_k^{(n)}\|_p < \varepsilon_k$, если n - велико.

Заметим, что все $\varphi_k^{(n)}(x)$ непрерывны на E ~~и даже во всём~~ $\mathbb{R}_n$ даже во всём R_n.

Далее определим ~~ф~~ функцию $\varphi(x) = \sum_1^m C_k \varphi_k^{(n)}(x)$

Справедлива цепочка неравенств.

$$\|f_n(x) - \varphi(x)\|_p \le \sum_{k=1}^m |C_k| \left(\|\chi_{F_k}(x) - \varphi_k^{(n)}\|_p + \right.$$

$$\left. + \|\chi_{E_k}(x) - \chi_{F_k}\|_p \right) \le \sum_{k=1}^m 2|C_k|\varepsilon_k < \varepsilon, \text{ поэтому}$$

ε_k можно выбирать из неравенства $0 < \varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} |C_k|^{-1}$

Т: Непрерывность в метрике L_p

Пусть E - огранич. измеримое множество, $p \ge 1$

Тогда $\forall f(x) \in L_p(E)$ непрерывна в метрике L_p, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$ такое, что справедливо $\|f(x+h) - f(x)\|_p < \varepsilon$ если $|h| < \delta$, а функция считается продолженной нулём на все пр-во R_n

► Пусть мн-во E содержится в шаре $B_0(R)$ радиуса R с ~~точкой~~ центром в точке $0 = x$.

Обозначим $E_1 = B_0(R+1)$ и воспользуемся предыдущей теоремой. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi(x) \in C(E_1)$ и даже (по замечанию в док-ве) $\varphi(x) \in C(\overline{E_1})$, такая, что $\|f(x) - \varphi(x)\|_{L_p(E_1)} < \frac{\varepsilon}{3}$. Пусть $|h| < \delta < 1$. Тогда при $x \in E$ тоже $x+h \in E_1$ и справедлива цепочка нер-в.

$$\|f(x+h)-f(x)\|_{L_p(E)} \leq \|f(x+h)-\varphi(x+h)\|_{L_p(E)} +$$

$$+\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_{L_p(E)} + \|f(x)-\varphi(x)\|_{L_p(E)} < \frac{\varepsilon}{3} + \cancel{\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_{L_p(E)} + \|f(x)-\varphi(x)\|_{L_p(E)}} < \frac{\varepsilon}{3} + \|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_{C(\bar{E})} \cdot$$

$$\cdot |E|^{\frac{1}{p}} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$ Нер-во $\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_{C(\bar{E})} < \frac{\varepsilon |E|^{-\frac{1}{3}}}{3}$ при

достаточно малых h имеет место в силу равномерной непрерывности непрерывной на $\bar{E}$, функции $\varphi(x)$.

№13.

Линейные нормированные пр-ва.

Опр: Пусть X - линейное пр-во над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Это пр-во наз-ся линейным ~~...~~ норм. пр-вом, если каждому $x \in X$ поставлено в соответствие $\|x\|$, причем выполнены аксиомы:

1) $\|x\| \geq 0$ $\quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ $\qquad \forall x, y \in X, \ \lambda \in \mathbb{F}$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Опр: послед. $\{x_n\}$ лин. норм. простр. X наз-ся фундаментальной, если $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$

Опр: ———— " ———— сходящейся к $x \in X$, если $\|x_n - x\| \to 0$, при $n \to \infty$

Опр: Лин. норм. пр-во наз-ся полным (Банаховым), если любая его фунд. послед. — сход.

Опр: Линейное многообразие L линейного норм. пр-ва X наз-ся подпространством, если L замкнуто относительно сходимости по норме.

Из 3-ей аксиомы $\Rightarrow$ $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$, откуда следует $\|x_n\| \to \|x\|$, если $x_n \to x$.

Теорема (Рисса) Пусть L - п/во линейного норм. п-ва X, $L \neq X$. Тогда $\forall \varepsilon \in (0,1)$ $\exists$ $y \in X \setminus L$, $\|y\| = 1$, такой, что $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$ для всех $x \in L$.

▸ Фиксируем произвольный $y_0 \in X \setminus L$ и обозначим $d = \inf\limits_{x \in L} \|y_0 - x\|$. Тогда $d > 0$, т.к. если $d = 0$, то $y_0 = \lim\limits_{x_n \in L} x_n$ и $y_0 \in L$ (в виду замкнутости L), что невозможно.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $x_0 \in L$, такой что $d \leq \|y_0 - x_0\| + d\,\varepsilon$. Положим $y = \dfrac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$, $y \notin L$, т.к. в противном случае и $y_0 \in L$, что невозможно и $\|y\| = 1$.

Положим $z = x_0 + \|y_0 - x_0\| x$, $x \in L$ и

$$\|y - x\| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x \right\| = \frac{\|y_0 - z\|}{\|y_0 - x_0\|} \geq \frac{d}{d + d\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} >$$

$> 1 - \varepsilon$.

Пример. R^n с нормой L^2 $\|x\| = \left(\sum_1^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

№14.

Пусть X и Y — линейные норм. пр-ва над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$

Опр: Отображение $A: X \to Y$ ($y = Ax$), то есть оператор ~~A~~ A, определённый на X с областью значений в Y наз-ся линейным оператором, если $\forall\ x_1, x_2 \in X$ и $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ справедливы

а) $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$

б) $A(\lambda x_1) = \lambda A(x_1)$

Опр: Линейный оператор A непрерывен ~~в на всём~~ ~~X $\Leftrightarrow$~~ в точке $x_0 \in X$, если $\forall \{x_n\}$ сход. к x_0, соответствующая п-ть образов $\{Ax_n\}$ сход. к элементу Ax_0.

Свойства:

T1: Линейный оператор непрерывен на всём пр-ве ~~A~~ X $\Leftrightarrow$ ~~A~~ A — непрерывен в одной точке $x_0 \in X$

▷ Пусть $x \in X$ — любая точка и $x_n \to x$. Тогда $x_n - x + x_0 \to x_0$ и в силу непрерывности A в x_0 $\Rightarrow$ $Ax_0 = \lim A(x_n - x + x_0) =$
◁ $= \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n - Ax + Ax_0$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax$

Опр: A — наз-ся ограниченным, если $\exists M : \|Ax\| \le M\|x\|$ выполнено $\forall x \in X$

T2: Для того, чтобы линейный оператор был ~~ограничен~~ непрерывен необх-и дост, чтобы A был ограничен.

▷ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть A — непрерывен, предположим A — неогр, тогда $\exists \{x_n\}$ для которой выполняется $\|Ax_n\| \ge n\|x_n\|$

Положим ~~ξ~~ $\xi_n = \dfrac{x_n}{n\|x_n\|}$, $\xi_n \to 0$, т.к. $\|\xi_n\| = \dfrac{1}{n}$, но

$\|A\xi_n\| = \dfrac{1}{n\|x_n\|}\|Ax_n\| \ge 1$, т.е. $A\xi_n$ не стремится к $A0 = 0$ $\Rightarrow$ A — не является непрерывным.

$\Leftarrow$ Пусть A - ограничен, т.е. $\|Ax_n\| \le M\|x_n\|$. Если $x_n \to x$ или $\|x_n \to x\|$ при $n \to \infty$, то из нерав-ва

$\|Ax_n - Ax\| \le M\|x_n - x\| \Rightarrow$ следует, $Ax_n \to Ax$, значит A - непрерывен.

Опр: Наименьшая из постоянных M удовлетворяющих условию $\|Ax\| \le M\|x\|$ для линейного ограниченного оператора A называется нормой оператора A и обозначается $\|A\|$.

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Совокупность всех линейных ограниченных операторов, отображающих лин. норм. X в лин. норм. пр-во Y образует лин. пр-во $L(X \to Y)$

Если A, B - лин. огр. операторы, то рав-во

$(A+B)x = Ax + Bx$ определяет сумму операторов.

а $(\lambda A)x = \lambda Ax$ - умножение оператора на число.

Нулем этого пр-ва является $Ox = 0$

В $L(X \to Y)$ можно ввести норму $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\|$

1) если $\|A\| = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0 \ \forall x \in X$

2) $\|\lambda A\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \|A\|$

3) $\|A\| + \|B\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax + Bx\| \le \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\| + \sup \|Bx\| = \|B\| + \|A\|$

Т.о. $L(X \to X)$ - линейное нормир. пр-во.

Т: Если X - лин. норм пр-во, Y - Банахово пр-во, ~~то~~ (полное лин. норм) то простр-во $L(X \to Y)$ также будет полным

$\triangleright$ Пусть послед. $\{A_n\}$ фунд. в $L(X \to X)$, $\|A_n x - A_m x\| \le$

$\le \|A_n - A_m\| \|x\| \to 0$ $n, m \to \infty$. $\Rightarrow \|A_n x - A_m x\| \to 0$

т.е. ~~уже~~ $\forall x \in X$ $\{A_n x\}$ – фундаментальна.

В силу полноты Y она сх. к эл-ту $y \in Y$

Итак, каждому эл-ту из X поставлен эл-т $y = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$, т.е. определён оператор $y = Ax$.

Этот оператор линеен, покажем его ограниченность

Т.к. п-ть операторов $\{A_n\}$ фундаментальна в $L(X \to Y)$, то и числовая послед-ть $\{\|A_n\|\}$ – фундаментальна, т.е. ограниченная: $\|A_n\| \leq M$ $\forall n$, откуда $\|A_n x\| \leq \|Ax\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq M\|x\|$,

что и означает ограниченность оператора A

Докажем формулу $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, в смысле $\|A - A_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Действительно, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ для всех $x \in X$, $\|x\| \leq 1$, выполняется $\|A_{n+p} x - A_n x\| < \varepsilon$

переходя к пределу при $p \to \infty$ получим $\|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon$ для любого $n > N$ и любого $x \in X$, $\|x\| \leq 1$. Но тогда $\|A_n - A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|(A_n - A)x\| \leq \varepsilon$, т.е. $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ в

смысле сходимости по норме пр-ва $L(X \to Y)$ ∎

№15.

Теорема Банаха-Штейнгауза:

Пусть X и Y - Банаховы пр-ва, если $A_n \in L(X \to Y)$ и послед. $\|A_nx\|$ ограничена для любого $x \in X$

Тогда $\exists C$ - постоянная, такая, что $\|A_n\| \leq C$, т.е. $\{\|A_n\|\}$ - ограничена.

▶ В предположении $\{\|A_n\|\}$ - неограничена, тогда мн-во $\{\|A_nx\|\}$ не ограничено на любом замкнутом шаре $\overline{B(x_0, \varepsilon)}$ $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$.

В самом деле, если бы нер-во $\|A_nx\| \leq C$ выполнялось $\forall n$ и всех $x \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}$, то, взяв $\forall \xi \in X, \xi \neq 0$, мы получим эл-т $x = \frac{\varepsilon}{\|\xi\|}\xi + x_0 \in \overline{B}(x_0, \varepsilon)$. Для этого эл-та $\|A_nx\| \leq C$ или

$$\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}\|A_n\xi\| - \|A_nx_0\| \leq \left\|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}A_n\xi + A_nx_0\right\| = \|A_nx\| \leq C,$$

следовательно

$$\|A_n\xi\| \leq \frac{C + \|A_nx_0\|}{\varepsilon}\|\xi\| \leq \frac{2C}{\varepsilon}\|\xi\| \text{ и } \|A_n\| \leq \frac{2C}{\varepsilon},$$ что

противоречит предположению

Если ~~нет~~ теперь $\overline{B_0(x_0, \varepsilon_0)}$ - любой замкнутый шар, то на нём мн-во $\{\|A_nx\|\}$ неограничено. Тогда $\exists n_1$ ~~такой~~ и эл-т $x_1 \in \overline{B_0}$ такие, что $\|A_{n_1}x_1\| > 1$. В силу непр. оператора нер-во $\|A_{n_1}x_1\| > 1$ выполняется и в некотором шаре $\overline{B_1(x_1, \varepsilon_1)} \subset \overline{B_0}$. На B_1 мн-во $\{A_nx\}$ также неограничено и $\exists n_2, x_2 \in \overline{B_1}$: $\|A_{n_2}x_2\| \geq 2$ и по непрерывности A_{n_2} это нер-во выполнено в некотором шаре $\overline{B_2(x_2, \varepsilon_2)} \subset \overline{B_1}$ и т.д...

Можно считать, что $n_1 < \ldots < n_n < \ldots$ и $\varepsilon_n \to 0$.

Тогда по теореме о вложенных шарах
$\exists!\ x \in \overline{B}_n(x_n, \varepsilon_n)\ \forall n$. В этой точке $\|A_{n_k} x\| > k$,

◁ что противоречит условию теоремы.

Следствие: X, Y - банаховы пр-ва, $A_n \in L(X \to Y)$
$\exists \{x_n\}$ такая, что $\|x_n\| \leq 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x_n\| = \infty$

Тогда $\exists x_0 \in X$, $\|x_0\| \leq 1$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|A_n x_0\| = \infty$

▷ Пусть это не так, ~~тогда~~ т.е. $\forall x \in X$, $\|x\| \leq 1$
послед-ть $\{\|A_n x\|\}$ ограничена. Если $\xi \neq 0$, то $x = \frac{\xi}{\|\xi\|}$
имеет норму $\|x\| = 1$ и $\|A_n x\| = \frac{\|A_n \xi\|}{\|\xi\|}$. Значит,
послед-ть $\{\|A_n x\|\}$ ограничена $\forall \xi \in X$ и по
теореме выше $\exists C$ - постоянная : $\|A_n\| \leq C$, но
$\|A_n x_n\| \leq \|A_n\| \|x_n\| \leq C$, что противоречит
◁ стремлению к ∞ $\{\|A_n x\|\}$

Пример применения: Покажем $\exists$ непрерывной
периодической функции, для которой ряд Фурье
расходится

$\exists f(x) \in C[-\pi, \pi]$ $f(-\pi) = f(\pi)$ $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_1^\infty (a_k$
$\cos(kx) + b_k \sin(kx))$ $a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt$

$b_k =$ —— // — $\sin(kt)\, dt$

Преобразуем частичную сумму ряда Фурье.

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt +$$
$$+ \sum_1^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(t-x)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}}\, dt$$

Положим $x = 0$ и $g(t) = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$; $g(t)$ непрерывная на $[-\pi,\pi]$, если её доопределим в точке.

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin(nt)\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\cos(nt)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{\sin(nt)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} + \frac{\cos(nt)}{2} = \frac{\sin(nt)}{t} + g(t)\sin(nt) + \frac{\cos(nt)}{2}$$

Т.о. $S_n(f,0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(nt)}{t}\,dt + O(1)$, $O(1)\to 0$

при $n\to\infty$.

Р-рим оператор $A_n f = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(nt)}{t}\,dt$ –

линейный оператор у пр-ва $f(x)\in C[-\pi,\pi]$

$f(-\pi)=f(\pi)$ в пр-ве R_1, ставящий с точностью до $O(1)$ в соответствие $f(x)$ ее частичную сумму ряда Фурье в точке $x=0$. $\exists f_n(t) = \operatorname{sgn} t \cdot \sin(nt)$, $\|f_n(t)\|_C = 1$,

$$A_n f_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2(nt)}{|t|}\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin^2(nt)}{|t|}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi n}\frac{\sin^2 y}{y}\,dy >$$

$$> \frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{\pi n}\frac{\sin^2 y}{y}\,dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{\pi n}\frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{\pi n}\frac{\cos 2y}{y}\,dy = \frac{1}{\pi}\ln(\pi n) + O(1),$$

т.к. интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos 2y}{y}\,y$ сход. по Дирихле-Абеля.

Итак $|A_n f_n|\to\infty$ при $n\to\infty$ и согласно следствию $\exists f_0(x)\in C[-\pi,\pi]$, $f_0(-\pi)=f_0(\pi n)$ для которой ряд Фурье расходится в $t=0$.

№16.

Обратный оператор.

Опр: Линейный оператор C наз-ся левым обратным для линейного оператора A, если $CA = I$, I - тожд. оп.

Лин. оп. B наз-ся правым обратным для лин. опер. A, если $AB = I$

Если $B = C$, то говорят, что оператор A имеет обратный, который обозначают A^{-1}

С этими понятиями связана задача $\exists!$ решений операторные ур-ний ~~Ay~~ $Ax = y$

Если A имеет A^{-1}, то решение $\exists!$.

Если A имеет B или C, то решение м.б. не единственным.

Дост. условие $\exists A^{-1}$

Т1: Пусть A - лин. опер., действующий из лин. норм. пр-ва X в лин. норм. пр-во Y, причём $\exists\, m > 0$, такая что $\|Ax\| \geq m\|x\|$ $\forall x \in X$.

Тогда $\exists$ A^{-1} - линейный ограниченный оператор

* Покажем, что $Ax = y$, $y \in R(A)$, имеет единственное решение.

Пусть 2: x_1, x_2, Тогда $A(x_1 - x_2) = 0$ и $m\|x_1 - x_2\| \leq \|A(x_1 - x_2)\| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ и сущ-вт A^{-1}. Этот опер. ограничен, т.к.

$\|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|AA^{-1}y\| = \frac{1}{m}\|y\|$, для всех $y \in Y$ ◼

Пусть A действует $X \to Y$, $R(A) \subset Y$ - область значений A

Если $\forall y \in$ ~~Y~~ $R(A)$ ур-ние $Ax = y$ $\exists!$ решение, то говорят, что A имеет A^{-1}

Т2: Теорема Неймана:

$\exists A$ – лин. огр. оператор, действ $X \to X$, X - Банахово пр-во и $\|A\| \le q < 1$. Тогда $I - A$ имеет обратный лин. огр. опер. $(I-A)^{-1}$

▸ Определим ~~$A^k = A^{k}$~~ $A^k = A(A^{k-1})$, $k = 1, 2 \ldots$ $A^0 = I$. Ясно, что $\|A^k\| \le \|A\|^k \le q^k$. Далее $\sum_0^\infty \|A^k\| \le \le \sum_0^\infty q^k = \frac{1}{1-q}$, пр-во $L(X \to X)$ – Банахово, значит сумма $\sum_0^\infty A^k$ представляет собой лин. огр. оп. $\forall n$ имеет место

$$(I-A)\sum_0^n A^k = \sum_0^n (I-A)A^k = \cancel{I - A^{n+1}} = \sum_0^n (A^k - A^{k+1}) =$$

$= I - A^{n+1}$, причём $I - A^{n+1} \to I$ при $n \to \infty$, т.к. $\|A^n\| \le \|A\|^n \to 0$. ~~Следовательно~~ $\Rightarrow (I-A)\sum_0^\infty A_k = I$, т.е. $(I-A)^{-1} = \sum_0^\infty A^k$, причем $\|(I-A)^{-1}\| \le \frac{1}{1-q}$ ◻

Т3: $\exists A, B \in L(X \to X)$. ~~Тогда~~ Где X - Банахово имеет обратный A^{-1} и $\exists$ линейный огр. оператор ΔA: $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тогда оператор $B = A + \Delta A$ (возмущение A) имеет обратный B^{-1}, причём $\|B^{-1} - A^{-1}\| \le \frac{\|\Delta A\| \|A^{-1}\|^2}{1 - \|\Delta A\| \|A^{-1}\|}$

▸ Представим обр. оператор $B = A + \Delta A =$ $= A(I + A^{-1}\Delta A)$ и т.к. по условию $\|A^{-1}\Delta A\| \le$ $\le \|A^{-1}\| \|\Delta A\| < 1$, то оператор $I + A^{-1}\Delta A$ имеет по теореме Неймана обратный опер.

Произведение $(I + A^{-1}\Delta A)A^{-1}$ – явл. обратным оператором к B и $\|B^{-1} - A^{-1}\| = \|(I + A^{-1}\Delta A)A^{-1} - A^{-1}\| \le$

$\cancel{\le \|(I + A^{-1} \Delta A)^{-1} \|}$

$\le \|(I + A^{-1} \Delta A)^{-1} - I\| \cdot \|A^{-1}\| \le$

$\le \sum_{1}^{\infty} \|A^{-1} \Delta A\|^{k} \|A^{-1}\| = \dfrac{\|A^{-1} \Delta A\| \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1} \Delta A\|} \le \dfrac{\|\Delta A\| \|A^{-1}\|^{2}}{1 - \|\Delta A\| \|A^{-1}\|}$

Т4: Теорема Банаха об обратном операторе.

Если линейный огр. опер A отображает банахово пр-во X на ~~Y~~ банахово пр-во Y взаимно однозначно, то $\exists$ лин. огр. опер. A^{-1}, $Y \to X$

№ 17.

Теорема Хана-Банаха.

$\forall$ Любой линейный функционал $f(x)$, определенный на линейном многообразии $L \subset X$ линейного нормир. пр-ва X можно продолжить на всё пр-во X с сохранением нормы, т.е. сущ.ет лин. функц. $F(x)$, опр. на всём X такой, что $F(x) = f(x)$ $\forall x \in L$, $\|F\|_X = \|f\|_L$

▶ $\exists$ $x_0 \notin L$ и $L_0 = (L, x_0)$ - мн-во эл-тов вида $u = x + tx_0$, $x \in L$ $t \in \mathbb{R}$. Мн-во L_0 - лин. многообразие и каждый его эл-т однозначно представим в таком виде. Пусть $u = x_1 + t_1 x_0 = x_2 + t_2 x_0$; если $t_1 = t_2$, то $x_1 = x_2$; если $t_1 \neq t_2$ то $\frac{x_1 - x_2}{t_2 - t_1} = x_0$ и $x_0 \in L$, что невозможно.

Выберем $\forall x_1 x_2 \in L$. Справедливо: $f(x_1) - f(x_2) = f(x_2 - x_1) \leq \|f\| \|x_2 - x_1\| \leq \|f\|(\|x_2 + x_0\| + \|x_1 + x_0\|)$

из чего вытекает: $f(x_2) - \|f\| \|x_2 + x_0\| \leq f(x_1) + \|f\| \|x_1 + x_0\|$, а в силу произвольности x_1 x_2 имеет место:

$$\sup_{x \in L} \{ f(x) - \|f\| \|x + x_0\| \} \leq C \leq \inf \{ f(x) + \|f\| \|x + x_0\| \}$$

$\exists u$ - любой эл-т из L. Введём функционал $\varphi(u)$ на L_0 по правилу $\varphi(u) = f(x) - tC$. На L имеет место $\varphi = f$, т.к. $t = 0$. Очевидно $\varphi(u)$ - линеен. Покажем ограниченность $\varphi(u)$ и $\|f\| = \|\varphi\|$

Если $t > 0$, то из того, что $\frac{x}{t} \in L$ и нерав-ва для постоянной "c" справедливы соотношения $\varphi(u) = t[f(\frac{x}{t}) - c] \le t\|f\|\|\frac{x}{t} + x_0\| =$

$= \|f\|\|x + tx_0\| = \frac{1}{t}\|f\| \cdot \|u\|$, а значит

$$\varphi(u) = t[f(\frac{x}{t}) - c] \le t \cdot \frac{1}{t}\|f\|\|u\| = \|f\|\|u\|$$

Заменяя в этих рассуждениях u на $-u$ получим $-\varphi(u) \le \|f\|\|u\|$, в совокупности

$|\varphi(u)| \le \|f\|\|u\|$ Мы доказали нер-во $\|\varphi\| \le \|f\|$, но т.к. $\varphi(u)$ есть продолжение $f(x)$, то его норма не может быть уменьшена. $\Rightarrow \|\varphi\|_{L_0} = \|f\|_L$

Закончим док-во теоремы в случае сепарабельного пр-ва X (т.е. в котором $\exists$ счётное всюду плотное мн-во эл-тов $x_1, x_2 \ldots \in X$.] Эти эл-ты линейно независимы и не попали в L_0. Продолжая функционал $\varphi(u)$ с L_0 на $L_1 = (L_0, x_1), L_2, \ldots$ мы построим лин. функц. $\psi(x)$ опр на всюду плотном X лин. многообразии $\hat{L} = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$ причём $\|\psi\|_{\hat{L}} = \|f\|_L$

Доопределим $\psi(x)$ на все пр-во X по непрерывности. Если $x \notin \hat{L}$, то $\exists$ п/пость $\{x_n\}$ эл-тов из $\hat{L}$ и $x_n \to x$ при $n \to \infty$, причём $|\psi(x_m) - \psi(x_n)| \le$

$\le \|\psi\|\|x_m - x_n\| \to 0$. $\Rightarrow \{\psi(x_n)\}$ имеет предел $F(x)$,

однозначно определяющий функционал $F(x)$ на X

Этот функционал линеен в силу ~~от~~ линейности $\psi(x)$ и линейности операции предельного перехода.

~~Ог~~ Ограниченность $F(x)$ вытекает из того, что следствием нер-ва $|\varphi(x_n)| \le \|\psi\| \|x_n\|$ является нер-во $|F(x)| \le \|\psi\| \|x\|$. Итак, $\|F\|_X \le \|\psi\|_L = \|f\|_L$,

а т.к. $F(x)$ - продолжение ~~f(x)~~ функционала $f(x)$, то его норма не м.б. уменьшена.

$\Rightarrow \|F\|_X = \|f\|_L$ доказано.

№18.

Общий вид линейного функ. в различных нормированных пр-вах.

1) Если $X = R^n$ - конечномерное, $e_1 \dots e_n$ - ортонорм. базис, что $x = \sum_1^n \xi_i e_i$

Тогда $\forall$ лин. функционал $f(x) = \sum_1^n \xi_i f(e_i) = \sum_1^n \xi_i f_i$

однозначно определяется числами $f_i = f(e_i)$

2) Если $X = l_p$ $p > 1$ - бесконечномерное пр-во эл-тов $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) : \|x\|_p = \left(\sum_1^\infty |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$\exists$ $e_1 \dots e_n \dots$ - орт. базис l_p тогда $x = \sum_1^\infty \xi_i e_i$,

$f(x) = \sum_1^\infty \xi_i f(e_i) = \sum_1^\infty \xi_i c_i$. Выясним св-ва c_i

Р-рим послед. эл-тов $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}$, где

$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} |c_k|^{q-1} \operatorname{sgn}(c_k), & k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Справедливо

соотношение: $f(x_n) = \sum_1^n |c_k|^q \le \|f\| \, \|x_n\|_{l_p} = \|f\| \left(\sum_1^n |c_k|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} =$

$= \|f\| \left(\sum_1^n |c_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}$, откуда в силу произвольности

n следует нер-во $\left(\sum_1^\infty |c_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \|f\|$ или $\|c\|_q \le \|f\|$

С другой стороны в силу нер-ва Гёльдера

$|f(x)| = \left|\sum_1^\infty \xi_i c_i\right| \le \left(\sum_1^\infty |c_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_1^\infty |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|c\|_q \|x\|_p$,

или $\|f\| \le \|c\|_q$. Значит $\|f\| = \|c\|_q$, то есть

$l_p^* = l_q$. Заметим также, что $l_p^{**} = l_q^* = l_p$ - рефлексивно.

3) Если $X = L_p(E)$ $p>1$ $|E|<+\infty$ можно сказать, что $f(x)=\int_E x(t)\alpha(t)\,dt$, $x(t)\in L_p(E)$ $\alpha(t)\in L_q(E)$ - однозначно определенная функция по функционалу $f(x)$, причём $\|f\| = \|\alpha(t)\|_{L_q(E)}$, $L_p^* = L_q$, $L_p^{**} = L_p$

4) Если $X = C[0,1]$ Справедлива т. Рисса, в которой утверждается, что $\forall$ лин. функционал $f(x)$ на $C[0,1]$ имеет вид $f(x)=\int_0^1 x(t)\,dh(t)$, где $h(t)\in C[0,1]$, $h(t)$ - фиксированная функция с ограниченным изменением:

$\|f\| = \sup_T \sum^n |h(t_i)-h(t_{i-1})|$ (sup берётся по всем разбиениям).

№19. X^* – полное нормир. пр-во.

Опр: Послед. $\{x_n\}$ эл-тов лин норм. пр-ва X наз-ся слабо сходящейся к $x_0 \in X$, если $\forall$ линейного функционала $f(x) \in X^*$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x_0)$

В ~~следствии~~ ~~[illegible]~~ следствии теоремы Хана – Банаха слабый предел – единственный. Также из теоремы об ограниченности последовательности Банахова пр-ва вытекает ограниченность слабо сход. послед.

Сильная сходимость ~~все~~ влечет за собой слабую сходимость, т.к. $|f(x_n) - f(x_0)| \le \|f\| \, \|x_n - x_0\|$ Обратное не верно.

Т: Критерий сильной сход.

П-ть $\{x_n\}$ лин. норм. пр-ва X сход. сильно $\Leftrightarrow$ когда послед. $\{f(x_n)\}$ сходится ~~[illegible]~~ равномерно в единичном шаре $\|f\| \le 1$

$\boxed{\Rightarrow}$ Если $x_n \to x$ сильно, то из нер-ва $|f(x_n) - f(x)| \le \|f\| \, \|x_n - x\| \le \|x_n - x\|$ следует р-ная сх. в шаре $\|f\| \le 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists$ $\{f_n(x)\}$ - сх. ~~[illegible]~~ р-но в шаре $\|f\| \le 1$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$, что $|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| < \varepsilon$ для всех $n > N$ и всех $f \in X^*$ $\|f\| \le 1$ Отсюда следует $\sup\limits_{\|f\| \le 1} |f(x_n - x)| \le \varepsilon$. Воспользуемся следствием к Теореме Хана – Банаха, обозначив $x_0 = x_n - x$

Мы имеем функционал $f_0(x)$, $\|f_0\| = 1$ $f_0(x_0) = \|x_0\|$ или $f_0(x_n - x) = \|x_n - x\|$, причем выбор $f_0(x)$ зависит от разности $x_n - x$.

Итак, $\|x_n - x\| = f_0(x_n - x) \le \sup\limits_{\|f\| \le 1} |f(x_n - x)| \le \varepsilon$ для всех

$n \geq N$, что и означает сильную сходимость

$\boxtimes$ $\{x_n\}$ к эл-ту x.

Опр: Сильной сходимостью $\{x_n\}$ в Банаховом пр-ве X к эл-ту $x \in X$ наз-ся сходимость по норме следующей числовой послед.

$\|x_n - x\| \to 0 \quad n \to \infty$ для некоторого $x \in X$

№20.

Гильбертовы пр-ва.

Опр: Гильбертовым пр-вом H наз-ся мн-во эл-тов $x, y, z \ldots$ со свойствами:

1) H - линейное пр-во над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

2) $\forall x, y \in H$ соответствует (x, y) - ~~$\mathbb{R}$~~ число $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ - скалярное пр-ние. со св-вами

а) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

б) $(x+z, y) = (x, y) + (z, y)$

в) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

г) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \iff x = 0$.

$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ - норма x в H.

3) H - полное в метрике $\rho(x, y) = \|x - y\|$, т.е. H - банахово пр-во.

4) H - бесконечномерное.

Св-ва скалярного произв.

$$\left.\begin{aligned} (x, y+z) &= (x, y) + (x, z) \\ (x, \lambda y) &= \bar{\lambda}(x, y) \end{aligned}\right\} \text{ - тривиальны.}$$

Нер-во $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$ при $y = 0$ очев. ~~при~~

$\exists y \in H \; y \neq 0 \; \lambda$ - любое число

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \bar{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + |\lambda|^2 (y, y)$$

полагая здесь $\lambda = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$ получим

$$(x, x) - \frac{(x, y)^2}{(y, y)} \geq 0$$

Откуда и следует нер-во Коши. Нер-во треуг. $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$ доказывается на основе нер-ва Коши

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y) \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

Рав-во параллелограмма $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

Т1: Замкнутое вып. мн-во W в гильбертовом пр-ве H содержит эл-т с наименьшей нормой, причём только один.

▷ Пусть $d = \inf\limits_{x \in W} \|x\|$ и пусть $\{x_n\}$ - минимизирующая п-ть, т.е. $x_n \in W$, $\|x_n\| \underset{n\to\infty}{\to} d$. Т.к. W - выпукло, то $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in W$, поэтому $\|x_n + x_m\| \ge 2d$

Согласно рав-ву параллелограмма

$$0 \le \|x_n - x_m\|^2 = 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - \|x_n + x_m\|^2 \to 0.$$

при $n, m \to \infty$, т.к. вычитаемая величина $\ge 4d^2$, а уменьшаемое $\to 4d^2$. В силу того, что H ~~полное~~ - полное, W - замкнуто, сущ-ет $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x_0 \in W$, причём $\|x_0\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = d$, т.е. x_0 - эл-т с наим. нормой. Докажем ~~единств~~ единственность.

Пусть x_1 - еще один эл-т W: $\|x_1\| = d$. Тогда

$$\|x_0+x_1\|^2 + \|x_0 - x_1\|^2 = 2(\|x_0\|^2 + \|x_1\|^2) = 4d^2,$$ т.к.

$\frac{x_0+x_1}{2} \in W$, то $d \le \frac{\|x_0+x_1\|}{2} \le \frac{1}{2}(\|x_0\| + \|x_1\|) = d$ или $\|x_0+x_1\|^2 = 4d^2$

Возвращаясь к р-ву параллелограмма для x_0 и x_1 имеем $\|x_0 - x_1\| = 0 \Rightarrow x_1 = x_0$ ◻

№21.

Опр: ~~Два~~ эл-та $x, y \in H$ наз-ся ортогональными ($x \perp y$), если $(x, y) = 0$.

Говорят, что $x \in H$ ~~ортогон~~ ортогонален $L \subset H$, если $x \perp y \ \forall y \in L$

Теорема Леви: Пусть L ~~з~~ - п/пво H. ~~И~~ Каждый вектор $x \in H$ допускает единственное представление $x = y + z$ $y \in L$ $z \perp L$, причем эл-т y осуществляет наилучшее приближение вектора x в п/ве L, т.е. $\|x - y\| = \min\limits_{u \in L} \|x - u\|$

▷ Обозначим мн-во $W = \{u - x ; u \in L\}$, которое замкнуто в силу замкнутости L и очевидно выпуклое. По теореме об эл-те с наименьшей нормой $\exists! \, z \in W$ с минимальной нормой, $z = x - y$ $y \in L$ или $y = x - z$. Покажем, что $z \perp L$. Пусть $v \neq 0$ - любой вектор из L, а λ - произвольное $\mathbb{C}$. Т.к. $z - \lambda v \in W$, то $\|z - \lambda v\|^2 \geq \|z\|^2$, поэтому $\|z\|^2 \leq (z - \lambda v, z - \lambda v) = \|z\|^2 - \lambda (v, z) - \bar{\lambda}(z, v) + |\lambda|^2 \|v\|^2$. Полагая $\lambda = \frac{(z, v)}{\|v\|^2}$ получим $- \frac{|(z, v)|^2}{\|v\|^2} \geq 0$, ~~то~~ или $(z, v) = 0$, а т.к. v - любой эл-т из L, то $z \perp L$. Докажем единственность разложения. Пусть $y + z = y_1 + z_1$, где $y, y_1 \in L$, $z, z_1 \perp L$. Тогда $y - y_1 = z_1 - z$, т.е. $y - y_1 \perp L$, другими словами $y - y_1$ ортогонален самому себе. $\Rightarrow y = y_1$ и $z = z_1$.

Второе утв. теорема следует из опр. W и теоремы об эл-те с наим нормой. ◁

Предел послед. эл-тов, ортогональных под-
пространству L – ортогонален L. Поэтому
эл-ты $\perp L$ образуют п/во, которое наз-ся
ортогональным дополнением к L и обозначает-
ся $L^{\perp}$. Т.к. $\forall x \in H$ $\cancel{x=y+z}$ равен $x=y+z$
$y \in L$, $z \in L^{\perp}$, говорят, что H разлага-
ется в прямую сумму подпространств
L и $L^{\perp}$ ($H = L \oplus L^{\perp}$), элемент y наз-ся
~~Эл~~ ортогональной проекцией эл-та x на
пр-во L, а оператор P, действующий по
закону $y = Px$, наз-ся оператором
ортогонального проектирования.

№22.

Р-рим линейный ограничен оператор, действующий из гильбертова пр-ва H на $\mathbb{C}$. Этот оператор мы будем называть линейным функционалом. Обозначим через $\ker f = \{x \in H : f(x) = 0\}$ — ядро функционала $f(x)$. $\ker f$ — подпр. H.

Лемма: Коразмерность пр-ва $\ker f$, т.е. ~~обр~~ ортогонального дополнения к ядру ~~из~~ любого лин. функционала $f(x)$ в H, не равного $\equiv 0$, равна 1: $\dim(\ker f)^{\perp} = 1$

Теорема: $\forall$ лин. функционал $f(x)$ в гильберт. пр-ве H представим в виде скалярного произв. $f(x) = (x, y)$. y однозначно опред. по $f(x)$, причем $\|f\| = \|y\|$

▷ Если $f(x) \equiv 0$, то $y = 0$. Если $f(x) \not\equiv 0$ обозначим через e — единичный вектор, ортогональный ядру $f(x)$. Согласно лемме и теореме Леви об ортог. проекции $\forall x \in H$ представим в виде $x = Px + (x, e)e$, где P - ортопроектор на ядро $\ker f$. Отсюда $\Rightarrow$
~~Отсю~~ $f(x) = f(Px) + (x, e) f(e) = (x, \overline{f(e)}\, e)$, т.к. $Px \in \ker f$. Полагая $y = \overline{f}(e) e$ получим $f(x) = (x, y)$ $\forall x \in H$.

Покажем ед-ность y. $\exists$ ~~$\exists$~~ y_1 : $f(x) = (x, y) = (x, y_1)$ $\forall x \in H$ или $(x, y - y_1) = 0$. Для $x = y - y_1$ получим:

$(y - y_1, y - y_1) = \|y - y_1\|^2 = 0$, т.е. $y = y_1$

По поводу нормы замечаем $|f(x)| = |(x,y)| \le \|x\| \|y\| \Rightarrow$
$\Rightarrow \|f\| \le \|y\|$, но $f(y) = \|y\|^2 \Rightarrow \|f\| \ge \|y\|$

Значит $\|f\| = \|y\|$

№ 23.

Опр: Система $\{e_n\}$ эл-тов гильб. пр-ва H наз-ся ортонормированной, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

Опр: Бесконечная система эл-тов лин. пр-ва наз-ся линейно независимой (л.н.з), если $\forall$ конечная подсистема этой системы л.н.з

Лемма: $\forall$ систему $\{h_n\}$ л.н.з эл-тов можно сделать ортонормированной, с помощью процесса ортогонализации Шмидта.

▷ Положаем $e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|}$, $\exists$ $g_2 = h_2 - c_{21} e_1$. Полагаем c_{21} так, чтобы $g_2 \perp e_1$, т.е. $c_{21} = (h_2, e_1)$. Получаем

$$e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}, \|g_2\| \neq 0.$$

ибо в противном случае $g_2 = 0$ и эл-ты h_1 и h_2 л.з.

$\exists$ $e_1 \dots e_{m-1}$ - построены. Вводим эл-т

$$g_m = h_m - \sum_{i=1}^{m-1} c_{mi} e_i$$

и подберём числа c_{mi} так, чтобы $g_m \perp e_i$ $i = 1 \dots m-1$.

Для этого надо взять $c_{mi} = (h_m, e_i)$.

Полагаем: $e_m = \frac{g_m}{\|g_m\|}$ $g_m \neq 0$

◁ и т.д....

$\exists$ L - подпр., порождённое ортонормированной системой $\{e_n\}$ и $x \in L$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ линейная комбинация $\sum_1^n \alpha_i e_i$, такая, что

$$\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \|^2 < \varepsilon$$

Но $\|x-\sum_1^n \alpha_i e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_1^n \bar{\alpha}_i (x,e_i) - \sum_1^n \alpha_i (e_i,x) + \sum_1^n |\alpha_i|^2 =$

$$= \|x\|^2 - \sum_1^n \bar{\alpha}_i c_i - \sum_1^n \alpha_i \bar{c}_i + \sum_1^n |\alpha_i|^2,$$ где $c_i = (x,e_i)$ — коэффициенты Фурье эл-та x. Перепишем последнее:

$$\|x-\sum_1^n \alpha_i e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_1^n |c_i|^2 + \sum_1^n |\alpha_i - c_i|^2,$$ откуда следует, что $\|x-\sum_1^n \alpha_i e_i\|^2$ достигает минимального значения $\alpha_i = c_i$. В этом случае

$$0 \le \|x-\sum_1^n \alpha_i e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_1^n |c_i|^2$$

В силу пр-вольности $\varepsilon > 0$ получим

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n c_i e_i = \sum_1^\infty c_i e_i,$$ причём

$$\sum_1^\infty |c_i|^2 = \|x\|^2$$ — рав-во Парсеваля

Пусть теперь x — любой эл-т $\in H$. Согласно теореме Леви $x = y + z$, $y \in L$, $z \perp L$. Тогда

$$y = \sum_{i=1}^\infty c_i e_i, \quad c_i = (y,e_i) = (x, \cancel{y} e_i) \text{ и } \sum_1^\infty |c_i|^2 = \|y\|^2$$

В силу рав-ва $\|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$ имеем $\sum_1^\infty |c_i|^2 \le \|x\|^2$ — нер-во Бесселя.

Опр: Ортонормированная система в H $\{e_n\}$ наз-ся полной, если в H не сущ никакого эл-та кроме ~~0~~ нуля, ортогонального всем e_n системы $\{e_n\}$. Система наз-ся замкнутой, если подпр. L, порождённое этой системой, совпадает с H.

Опр: Замкнутая ортонормированная система наз-ся ортонормированным базисом в гильбертовом пр-ве H.

Легко проверяется справедливость:

1) В гильбертовом пр-ве H полнота и замкнутость ортонормированной системы совпадают.

2) Любая ортонормированная система $\{e_n\}$ в гильбертовом пр-ве сходится к нулю.

№24.

Опр: сепарабельное пр-во — пр-во в котором можно выделить счётное всюду плотное мн-во.

Т: В любом сепарабельном гильбертовом пр-ве $\exists$ ортонормированный базис, т.е. полная ортонормированная система.

▷ Пусть $G = \{g_1, g_2 \ldots\}$ — счётное и всюду плотное в гильб. пр-ве H множество. $\overline{G} = H$ $(g_1 \neq 0)$

Положим $e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}$ и обозначим через L_1 — пространство, порождённое e_1. Выберем g_{n_2} — первый по счёту эл-т не принадлежащий L_1 и рассмотрим h_2 — его проекцию на $L_1^{\perp} = H \ominus L_1$. Так как $h_2 \neq 0$, то $e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|}$, а через L_2 обозначим подпространство, порождённое e_1 и e_2. Пусть $g_{n_3} \notin L_3$ первый по счёту за g_{n_2} и h_3 — его проекция на $L_2^{\perp} = H \ominus L_2$. Т.к. $h_3 \neq 0$, то $e_3 \frac{h_3}{\|h_3\|}$ и т.д.

Получим ортонормированную систему $\{e_i\}$ и в силу того, что любой эл-т $g_{n_2} \in L_m$???

по построению, то замыкание линейной оболочки системы $\{e_i\}$ совпадает с H, т.е. эта система образует базис. Теорема доказана. ◁

Т: Любое комплексное (вещественное) сепарабельное гильбертово пространство изоморфно и изометрично комплексному (вещ-му) пр-ву l_2, т.е. все компл. (вещ.) гильб. пр-ва изоморфны между собой.

◄ Пусть H - сеп. гильб. пр-во и $\{e_i\}$ - орт. базис в нём. Если $\forall x \in H$ то $\hat{x} = (c_1, c_2, \dots)$, $c_i = (x, e_i)$ и т.к. $\sum\limits_1^{\infty} |c_i|^2 = \|\hat{x}\|^2 = \|x\|_H^2 < +\infty$, то $\hat{x} \in l_2$.

Пусть $x, y \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Ясно, что $\alpha x + \beta y \in H$, $\alpha \hat{x} + \beta \hat{y} \in l_2$, $\|\alpha x + \beta y\|_H = \|\alpha \hat{x} + \beta \hat{y}\|_{l_2}$, следовательно отображение $H \to l_2$ сохраняет линейную операцию и расстояние.

Обратно, пусть $\hat{z} = (z_1, z_2, \dots) \in l_2$. Р-рим в H последовательность $z_n = \sum\limits_1^n z_i e_i$. Т.к. $\|z_m - z_n\|^2 = \sum\limits_{i=n+1}^{m} |z_i|^2 \to 0$ при $m, n \to \infty$, то послед. $\{z_n\}$ - фундаментальная. В силу полноты H имеет место $z_n \to z \in H$, а имея ввиду $(z, e_i) = \lim\limits_{n \to \infty} (z_n, e_i) = z_i$ получаем $\forall \hat{z} \in l_2$ эл-т $z \in H$, где z_i - коэфф-ты Фурье. Таким образом отображение однозначно, а из рассуждений выше следует, что оно изометрично и изоморфно.

► Теорема доказана.

№25.

Теорема: Рисса-Фишера.

Пространства $L_2(E)$ и l_2 изометричны, причём $\int\limits_E |f(x)|^2 dx = \sum\limits_1^\infty |c_i|^2$, где $c_i = \int\limits_E f(x)\overline{e_i(x)}dx = (f, e_i)$

Теорема: о слабой компактности...

В сепарабельном гильбертовом пр-ве H ограниченная послед-ть содержит слабо сходящуюся подпослед.

▸ $\exists \|x_n\| \le C$ и т.к. H - сепарабельно, то в нём сущ-ет ортонормированный базис $\{e_i\}$. В силу $|(x_{n_k}, e_1)| \le \|x_n\| \le C$ по теореме Больцано-Вейерштрасса сущ. п/послед $\{x_{n_k}\}$ для которой (x_{n_k}, e_1) сходится. Так как $|(x_{n_k}, e_2)| \le \|x_n\| \le C$, то $\exists$ п/послед $\{x_{n_{k_1}}\}$ для которой $(x_{n_{k_1}}, e_2)$ сходится и так далее.

Возьмём диагональную посл. послед. $\{\tilde{x}_n\}$, то есть послед. где элемент $\tilde{x}_n$ равен n-му члену подпоследовательности для базисного эл-та e_n. Для неё $(\tilde{x}_n, e_k)$ сходится при $n \to \infty$ и также сходится $(\tilde{x}_n, \psi)$, где $\psi = \sum\limits_1^n \alpha_i e_i$ - любая линейная комбинация из эл-тов ортонормированного базиса.

Докажем сходимость послед-ти $(\tilde{x}_n, z)$ $\forall z \in H$. $\exists\, \varepsilon > 0$, тогда сущ линейная комбинация $\psi = \sum\limits^n \alpha_i e_i$ такая, что выполняется $\|z - \psi\| \le \frac{\varepsilon}{2C+1}$. Выберем $N(\varepsilon)$ для которого

при всех $n, m \geq N$ выполняется
нер-во $\cancel{\|z-\psi\|}$ $|(\tilde{x}_n - \tilde{x}_m, \psi)| < \frac{\varepsilon}{2C+1}$

Тогда: $|(\tilde{x}_m, z) - \underset{=?}{(\tilde{x}_n, z)}| \leq |(\tilde{x}_m - \tilde{x}_n, z-\psi)| +$
$+ |(\tilde{x}_m - \tilde{x}_n, \psi| \leq (\|\tilde{x}_m\| + \|\tilde{x}_n\|)\|z-\psi\| + \frac{\varepsilon}{2C+1} <$
$< 2C \frac{\varepsilon}{2C+1} + \frac{\varepsilon}{2C+1} = \varepsilon$

Тем самым сходимость послед-ти $(\tilde{x}_n, z)$ доказана $\forall\, z \in H$.

Покажем, что $\exists$ слабый предел x_0 послед-ти $\{x_n\}$. Обозначим $f(z) = \lim_{n\to\infty} (\tilde{x}_n, z)$ - линейный функционал на H. По теореме Рисса-Фреше $f(z) = (x_0, z)$, т.е. $\lim_{n\to\infty} (\tilde{x}_n, z) = (x_0, z)$, а значит

$\boxtimes$ x_0 - слабый предел для $\{\tilde{x}_n\}$. Теорема доказана.

№26.

Сопряжённый оператор.

Пусть A - лин. опер., действ. $X \to Y$, X, Y - лин. норм. пр-ва. Если $\varphi(y)$ - любой линейный функционал, определённый на Y, то $f = \varphi(Ax)$ - линейный функционал определённый на X:

$|f(x)| = |\varphi(Ax)| \leq \|\varphi\| \|Ax\| \leq \|\varphi\| \|Ax\| \leq \|\varphi\| \|A\| \|x\|$

Таким образом любому линейному функц. $\varphi \in Y^*$ ставится в соответствие лин. функц. $f \in X^*$, что есть построен оператор, определённый на Y^* со значениями X^*. Этот оператор обозначим A^* и назовём сопряжённым: $f = A^*\varphi$. Если написать значение функционала $f(x) = (f, x)$, то можно написать $(A^*\varphi, x) = (\varphi, Ax)$

Т1: Пусть $A \in L(X \to Y)$. Тогда существует $A^* \in L(Y^* \to X^*)$, т.е. A^* - линейный ограниченный оператор, причём $\|A\| = \|A^*\|$

▷ Из определения оператора A^* следует цепочка соотношений $|A^*\varphi(x)| = |f(x)| = |\varphi(Ax)| \leq \leq \|\varphi\| \|Ax\| \leq \|\varphi\| \|A\| \|x\|$, откуда следует $\|A^*\varphi\| = \|f\| \leq \|\varphi\| \|A\|$, а затем оценка $\|A^*\| \leq \|A\|$

Далее пусть x_0 - любой эл-т пр-ва X. По следствию из теоремы Хана-Банаха сущ-ет линейный функционал $\varphi_0 \in Y^*$ такой, что $\|\varphi_0\| = 1$ и $\varphi_0(Ax_0) = \|Ax_0\|$. Тогда $\|Ax_0\| = \varphi_0(Ax_0) = f_0(x_0) \leq \|f_0\| \|x_0\| = \|A^*\varphi_0\| \|x_0\| \leq \|A^*\| \|\varphi_0\| \|x_0\| = \|A^*\| \|x_0\|$. Отсюда в силу произвольности

x_0 получаем оценку $\|A\| \le \|A^*\|$, а, затем и рав-во $\|A\| = \|A^*\|$. Теорема доказана. ▨

Пусть $A \in L(H \to H)$. Обозначим $\operatorname{Im} A = \{y \in H : y = Ax\}$ — образ оператора A, $\ker A = \{x \in H : Ax = 0\}$ — ядро A.

Если A ограничен, то $\ker A$ — подпространство.

T2: Если $A \in L(H \to H)$, H — гильбертово пр-во, то $H = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus \ker A^*$

▸ Т.к. $\overline{\operatorname{Im} A}$ — подпространство, то $H = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus (\overline{\operatorname{Im} A})^\perp$. По предыдущей теореме $\exists$ лин. ~~опер~~, огран. опер. A^*. Покажем, что $\ker A^* = (\overline{\operatorname{Im} A})^\perp$. Если $x \in \ker A^*$, то $A^* x = 0$ и $\forall y \in H$ справедливо рав-во $(y, A^* x) = (Ay, x) = 0$, т.е. есть $x \perp Ay$, т.е. $x \perp \operatorname{Im} A$. Отсюда следует, что $x \perp \overline{\operatorname{Im} A}$ ~~или даже $x \perp \operatorname{Im} A$~~, а потому $x \in (\overline{\operatorname{Im} A})^\perp$.

Обратно $x \in (\overline{\operatorname{Im} A})^\perp$, следовательно $x \perp \overline{\operatorname{Im} A}$ или даже $x \perp \operatorname{Im} A$. Значит $(Ay, x) = 0$ ~~$\forall y$~~ для всех $x, y \in H$. Но $(Ay, x) = (y, A^* x) = 0$ или полагая $y = A^* x$ получим $\|A^* x\| = 0$ $A^* x = 0$, т.е. есть $x \in \ker A^*$. Теорема доказана. ▨

Опр: Множество M-метрического пр-ва X наз-ся предкомпактным, если ∀ послед-ть его ~~эл~~ эл-тов содержит фундаментальную послед-ть.

Опр: Оператор, действующий из одного метрического пр-ва в другое наз-ся компактным, если он всякое ограниченное мн-во переводит в предкомпактное.

Опр: Линейный оператор A действующий из лин. норм. пр-ва X в лин. норм. пр-во Y наз-ся вполне непрерывным, если он слабо сходящуюся послед-ть переводит в сильно сходящуюся.

Лемма: Пусть X - Банахово пр-во. Если послед-ть $x_n \in X$ сходится слабо к эл-ту $x_0 \in X$ и предкомпактна, то $x_n \to x_0$ сильно.

Теорема 1: Пусть X, Y - Банаховы пр-ва. Любой компактный оператор A действующий из X в Y переводит всякую слабо сходящуюся послед-ть в X в сильно сход. в Y

Теорема: Если A - вполне непрерывный оператор $H \to H$ H - гильбертово пр-во, то оператор A^* также вполне непрерывен.

▶ Пусть $x_n \to x_0$ слабо. Докажем, что $A^*(x_n - x_0) \to 0$ сильно.

Действительно:

$$\|A^*(x_n - x_0)\|^2 = (A^*(x_n - x_0), A^*(x_n - x_0)) = ((x_n - x_0), AA^*(x_n - x_0)) \le \|x_n - x_0\| \, \|AA^*(x_n - x_0)\| \to 0,$$

т.к. $\|x_n - x_0\| \le C$. AA^* вполне непрерывен.

и по теореме 1 $AA^*(x_n - x_0) \to 0$ сильно

Поскольку любое в H ограниченное множество слабо компактно, что оператор A^* переводит ограниченное мн-во в предкомпактное, что есть является вполне непрерывным.

$\boxtimes$

В сепарабельном гильбертовом пр-ве понятия компактного и вполне непрерывного оператора совпадают

№28.

I теорема Фредгольма

В связи с вопросом об однозначности разрешимости интегральных уравнений вида: $x(t) = \int K(t,s)\, x(s) ds + f(t)$ $|E| < +\infty$ $f(x) \in L_2(E)$

$K(t,s) \in L_2(E \times E)$ р-рим теорию ур-ний $(I - A)x = f$ I - тождественный A - вполне непрерывный $H \to H$ $f \in H$ Обозначим $L \equiv I - A$ и наряду с ур-нием $Lx = f$ будем р. вать $Lx = 0$ и $L^* y = h$ $L^* y = 0$

Лемма1: Мнообразие $Im\, L$ - замкнуто, где $Im\, L = \{ y \in H : y = Lx \}$

Лемма2: $H = Ker\, L \oplus Im\, L^*$, $H = Ker\, L^* \oplus Im\, L$

Её непосредственным следствием является:
Теорема: 1-ая Фредгольма.
Ур-ние $Lx = f$ разрешимо $\Leftrightarrow$ когда $f \perp Ker\, L^*$, т.е. эл-т. f ортогонален любому решению ур-ния $L^* y = 0$.

Докажем, что $Im\, L = \overline{Im\, L}$, т.е. если $y_n \in Im\, L$ и $y_n \to y \in H$, то $y \in Im\, L$. По условию $y_n = Lx_n = x_n - Ax_n \to y$ Будем считать, что $x_n \perp Ker\, L$, ибо в противном случае перейдём к

~~$x_n - P x_n$~~ $x_n - P x_n$, где P - ортопроектор на $\mathrm{Ker}\, L$, причём $L(P x_n) = 0$. Покажем, что $\|x_n\| \le C$. Если это не так, то сущ-ет под/сть $\{x_n'\}$ послед-сти $\{x_n\}$: $\|x_n'\| \to +\infty$. По условию $y_n \to y$, значит $\|y_n\| \le C_1$, что приводит к $\frac{\|x_n' - A x_n'\|}{\|x_n'\|} = \frac{\|y_n'\|}{\|x_n'\|} \to 0$.

Т.к. A - вполне непрерывный оператор, а посл-сть $\left\{\frac{x_n'}{\|x_n'\|}\right\}$ ограничена, то $\exists$ п/п $\{x_n''\}$ посл $\{x_n'\}$: $\left\{\frac{A x_n''}{\|x_n''\|}\right\}$ - сходится. Но тогда и сходится $\{z_n\}$, где $z_n = \frac{x_n''}{\|x_n''\|}$. $\exists$ $z = \lim\limits_{n\to\infty} x_n''$ и в силу $\|z_n\| = 1$ имеет место $\|z\| = 1$. С другой стороны $L z_n \to 0$ и из сходимости $z_n \to z$ следует $Lz = L(z - z_n) + L z_n \to 0$ т.е. $Lz = 0$, значит $z \in \mathrm{Ker}\, L$. Однако все $x_n \perp$ $\mathrm{Ker}\, L$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = z \perp \mathrm{Ker}\, L$, т.е. эл-т z ортогонален себе. $\Rightarrow z = 0$, противоречие с $\|z\| = 1$. Итак $\|x_n\| \le C$, а поэтому $\exists$ сход. ~~последов~~ под/сть $\{A \tilde{x}_n\}$. Отсюда следует сходимость $\{\tilde{x}_n\}$, причём $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = x \in H$. В пределе получим $Lx = y$, то есть $y \in \mathrm{Im}\, L$.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ положим $H^k = \mathrm{Im}\, L^k$, в частности $H^0 = H = \mathrm{Im}\, L^0$, где $L^0 = I$, $H' = \mathrm{Im}\, L$ и т.д.

По ~~лемме~~ лемме о замкнутости $\mathrm{Im}\, L$ все H^k - замкнуты и очевидно $H \supset H' \supset \ldots$, причём $L(H^k) = H^{k+1}$.

Лемма о пр. сумме: $H = \mathrm{Ker}\, L \oplus \mathrm{Im}\, L^*$ $H = \mathrm{Ker}\, L^* \oplus \mathrm{Im}\, L$

Лемма 3: $\exists\ j : H^{k+1} = H^k\ \forall k \geq j$

Лемма 4: Если $\mathrm{Ker}\, L = 0$, то $\mathrm{Im}\, L = H$, Если $\mathrm{Ker}\, L^* = 0$, то $\mathrm{Im}\, L^* = H$.

▷ Если $\mathrm{Ker}\, L = 0$, то L отображает H на H взаимно однозначно, а при $\mathrm{Im}\, L \neq H$ цепочка H^k состоит из различных н/з подпространств. По лемме 3 их конечное число, т.е. если $x_0 \in H \setminus H'$ и номер k такой, что $H^k = H^{k+1}$, тогда $L^{k-1} x_0 = L^k y$ и т.д. Получим: $x_0 = Ly$, что означает, что $x_0 \in H'$. Полученное противоречие доказывает рав-во $\mathrm{Im}\, L = H$. Аналогично устанавливается, что $\mathrm{Im}\, L^* = H$, если $\mathrm{Ker}\, L^* = 0$

Лемма 5: Если $\mathrm{Im}\, L = H$, то $\mathrm{Ker}\, L = 0$

▷ Т.к. $\mathrm{Im}\, L = H$, то по лемме о прямой сумме ядра и образа L $\mathrm{Ker}\, L^* = 0$, но тогда по лемме 4 $\mathrm{Im}\, L^* = H$. Снова применяя лемму о прямой сумме получим $\mathrm{Ker}\, L = 0$.

Из ~~лемм~~ Леммы 4 и 5 непосредственно следует:

Теорема 2-ая т. Фредгольма:

~~Либо однородные ур-ния $Lx = 0$ и $L^* y = 0$~~

Либо уравнение $Lx=f$ имеет единственное решение при любой правой части $f \in H$, либо ур-ние $Lx=0$ имеет ненулевое решение.

№ 30.

Т: Третья теорема Фредгольма.

От Однородные ур-ния $Lx=0$ и $L^*y=0$ имеют одно и то же и при том конечное число линейно независимых решений.

▷ $\exists\ \mu = \dim \operatorname{Ker} L$, $\nu = \dim L^*$. Если $\mu=+\infty$, то в пространстве $\operatorname{Ker} L$ существует счётная ортонормированная система $\{x_k\}$. Из $Lx_k=0$ следует рав-во $Ax_k=x_k$, причём при $l\neq k$ $\|Ax_l - Ax_k\| = \|x_l - x_k\| = \sqrt{2}$, т.е. из послед-ти $\{Ax_k\}$ нельзя выделить сходящуюся п/п-ть, что противоречит полной непрерывности оператора A, т.о. $\mu, \nu < +\infty$

Докажем рав-во $\mu=\nu$. $\exists \{\varphi_i\}$ $\{\psi_i\}$ - ортонормированные базисы в $\operatorname{Ker} L$ и $\operatorname{Ker} L^*$ соответственно. От противного; предположим, $\mu<\nu$

Получим: $Sx = Lx + \sum\limits_{j=1}^{\mu} (x,\varphi_j)\psi_j$

Т.к. оператор S получается сложением L и конечномерного оператора, то все результаты справедливы для оператора L и для S

Докажем, что ур-ние $Sx=0$ имеет только тривиальное решение. Итак, $Lx + \sum\limits_{j=1}^{\mu}(x,\varphi_j)\psi_j = 0$

По лемме 2 (билет 29) $(Lx, \psi_j)=0$, значит $(x,\varphi_j)=0$ $\forall j$ $1\ldots\mu$. Поэтому $Lx=0$, то есть $x\in \operatorname{Ker} L$ и одновременно $x \perp \operatorname{Ker} L \Rightarrow x=0$

Из утверждения о том что ур-ие $Sx=0$ имеет только тривиальное решение по г-ой Т. Фредгольма следует ∃ эл-та y, для которого справ-во рав-во

$$Ly+\sum_{j=1}^{\mu}(y,\varphi_j)\psi_j=\psi_{\mu+1}$$

~~Умножение~~ Умножая это рав-во скалярно на $\psi_{\mu+1}$ получим слева 0, справа 1 т.к. $Ly\in \operatorname{Im}L$ а $\operatorname{Im}L\perp \operatorname{Ker}L^*$. Противоречие означает $\mu\geq 0$. Заменив в рассуждениях L на L^* получим нер-во $\mu\leq 0$. Т.о. $\mu=0$ и теорема доказана

☒